Міністерство освіти і науки України

Харківська національна академія міського господарства

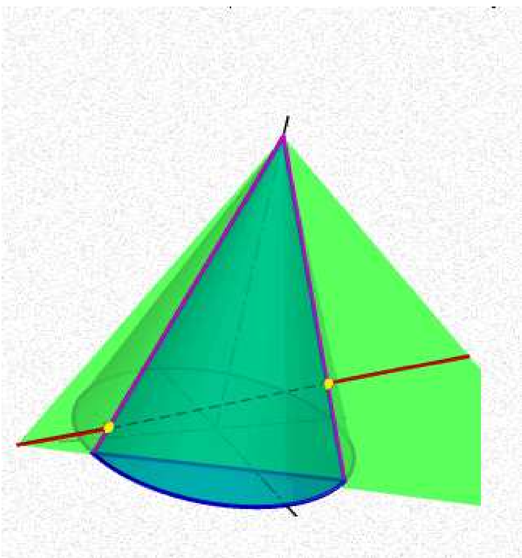
О.Є. МАНДРІЧЕНКО

Конспект лекцій

з курсу

ІНЖЕНЕРНОЇ ГРАФІКИ

(для студентів 1 курсу денної форми навчання за напрямком підготовки – 6.050701, 6.050702)



ХАРКІВ – ХНАМГ – 2008

Конспект лекцій з курсу інженерної графіки (для студентів 1 курсу, денної форми навчання за напрямком підготовки – 6.050701, 6.050702) / Укл.: Мандріченко О.Є.- Харків: ХНАМГ, 2008. - 112с.

Укладач: О.Є. Мандріченко

Рекомендовано кафедрою інженерної та комп'ютерної графіки,

протокол № 2 від 23 жовтня 2008 р.

Вступ

Графічна інформація є засобом спілкування у всіх сферах діяльності людини. І в цьому значенні у процесі вивчення графічних дисциплін студент повинен придбати навички роботи з кожної за призначенням і видам графічної інформації від традиційного креслення і текстового документа до рекламного ролика, виконаного засобами комп'ютерної графіки і Web-сторінок.

Незалежно від назви «Нарисна геометрія та інженерна графіка», «Інженерна і машинна графіка» чи просто «Інженерна графіка» це навчальна дисципліна державного значення, є однією із загально професійних дисциплін, що викладається в Харківській національній академії міського господарства.

Інженерна графіка – це дисципліна, метою якої є безпосереднє навчання студентів роботі з різною за видом і змістом графічною інформацією, основам графічного подання інформації, методам графічного моделювання геометричних об'єктів, правилам розробки й оформлення конструкторської документації, графічних моделей явищ і процесів.

Державний освітній стандарт установлює вимоги до змісту й обсягу дисципліни залежно від вибраної спеціальності, по якій навчається студент.

Лекція №1

Предмет нарисної геометрії. Методи проектування. Епюр Монжа. Комплексне креслення точки

1.1. Предмет нарисної геометрії

Теоретичні основи візуалізації інформації про геометричні об'єкти, різноманіття геометричних об'єктів простору, відносини між ними і їхнім графічним відображенням на площині складають предмет нарисної геометрії.

Задача цієї науки – створення оптимальних геометричних форм об'єктів машинобудування, архітектури і будівництва, розробка теорії графічного відображення об'єктів і процесів.

Нарисна геометрія з часів її основоположника Г. Монжа (1746-1818) завоювала своє гідне місце у вищій школі як наука. Найважливіше прикладне значення цієї дисципліни полягає в тому, що вона учить володіти графічною мовою, учить виконувати і читати креслення й інші зображення геометричних об'єктів, без чого немислиме формування інженера.

Вивчення нарисної геометрії сприяє розвитку просторової уяви і навичок правильного логічного мислення. Удосконалюючи нашу здатність - по плоскому зображенню думкою створювати представлення про форму предмета і навпаки створення зображень думкою створених образів – візуалізація думки.

Однак не всяке зображення відображає геометричні властивості оригіналу і не може бути прийняте для всебічного його дослідження. Принципова відмінність методів зображення, досліджуваних у курсі нарисної геометрії, від деяких сучасних технічних засобів відображення (фотографія, голографія й ін.), полягає в можливості з великою наочністю і метричною вірогідністю відобразити не тільки існуючі предмети, але і виникаючі в нашому представленні образи проектованого об'єкта.

Зображення, що дозволяє визначати взаємозв'язок (взаємоналежність) елементів об'єкта, називають **повним**.

Зображення, по яких можна визначити розміри об’єкта, називається **метрично визначеними**.

З площинних зображень об’єкта найбільш широке застосування в практиці одержали малюнки і креслення.

Малюнком називають зображення предмета від руки і на око з удаваними відносними розмірами і положеннями окремих його елементів.

Кресленням називають зображення предмета, побудоване за особливими правилами за допомогою креслярських інструментів у точній залежності від розмірів і положення в просторі відповідних ліній предмета.

У техніці креслення є основним засобом вираження людських ідей. Вони повинні не тільки визначати форму і розміри предметів, але і бути досить простими і точними в графічному виконанні, допомагати всебічно, досліджувати предмети і їхні окремі деталі.

Ці вимоги до креслень і привели до створення **теорії зображень**, що складає **основу** нарисної геометрії. Правила побудови зображень засновані на методі проекцій. Тому **проекційний метод** побудови зображень є **основним методом нарисної геометрії.**

Отже в курсі нарисної геометрії вивчаються:

1. Методи побудови просторових об’єктів на площині.
2. Способи графічного рішення різних геометричних задач, зв’язаних з оригіналом.
3. Способи перетворення і дослідження геометричних властивостей зображеного об’єкта.
4. Прийоми збільшення наочності і візуальної вірогідності зображень проекціюємого об’єкта.

1.2. Види проекціювання

Одне з основних геометричних понять - **відображення множин**. У нарисній геометрії кожній точці тривимірного простору ставиться у відповідність визначена точка двовимірного простору – площини.

Геометричними елементами відображення служать точки, лінії, поверхні простору. Геометричний об’єкт, розглянутий як точечна множина, відображається на площину за законом проекціювання. Результатом такого відображення є зображення об’єкта.

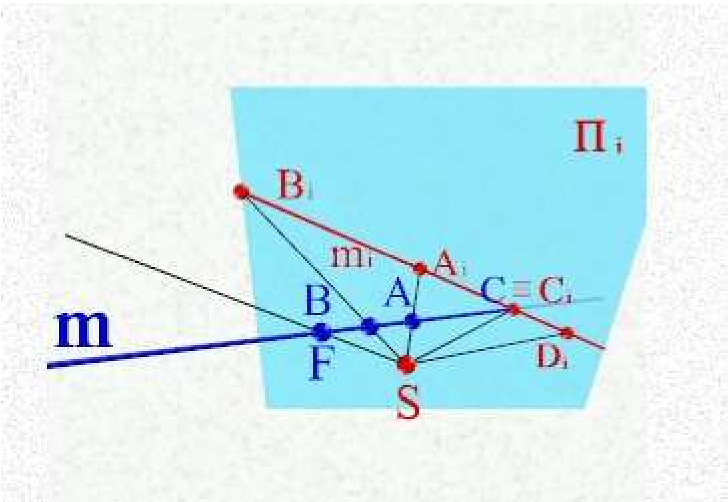


Рис.1.1 - Центральне проекціювання

В основу будь-якого зображення покладена операція проекціювання, що полягає в наступному. У просторі вибирають довільну точку **S** (рис. 1.1) як **центр проекціювання** і площину **Пi**, що не проходить через точку **S**, як площину проекцій.

Щоб спроектувати точку **А** на площину **Пi** , через центр проекціювання **S** проводять промінь **SA** до його перетину з площиною **Пi** в точці **Ai.**

Точку Ai прийнято називати центральною проекцією точки А , а промінь SA - проекціючим променем.

Описані побудови виражають суть операції, названої **центральним проекціюванням** точок простору на площину.

Центральне проекціювання є найбільш загальний випадок проекціювання геометричних об’єктів на площині. Основними і незмінними його властивостями (**інваріантами**) є наступні:

1. Проекція точки – точка;
2. Проекція прямої – пряма;
3. Якщо точка належить прямій, то проекція цієї точки належить проекції прямої.

За принципом центрального проекціювання працюють фотоапарати і кінокамери. Спрощена схема роботи людського ока близька до цього виду проекціювання. Тому зображення, побудовані за принципом центрального проекціювання, найбільш наочні і їх широко використовують у своїй роботі художники, архітектори, дизайнери і багато інших фахівців.

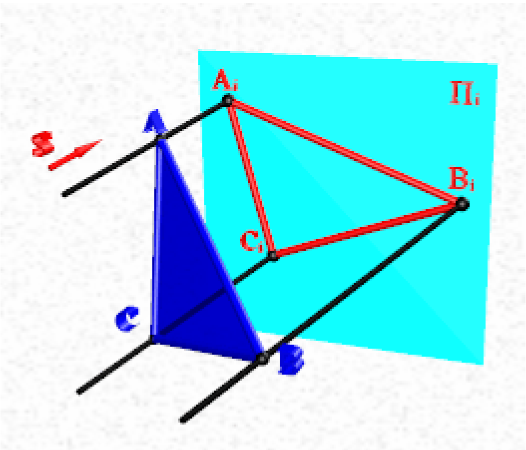


Рис.1.2 - Паралельне проекціювання

Окремий випадок центрального проекціювання – **паралельне проекціювання**, коли центр проекціювання вилучений у нескінченність, при цьому проецюючі промені можна розглядати як паралельні проецюючі прямі. Положення проекцюючих прямих щодо площини проекцій визначається напрямком проекціювання **S** (рис. 1.2). У цьому випадку отримане зображення називають **паралельною проекцією** об'єкта.

При паралельному проекціюванні зберігаються властивості центрального і додаються наступні:

1. Проекції паралельних прямих паралельні між собою
2. Відношення відрізків прямої дорівнює відношенню їхніх проекцій
3. Відношення відрізків двох паралельних прямих дорівнює відношенню їхніх проекцій.

У свою чергу паралельні проекції підрозділяються на **прямокутні**, коли проекцюючі прямі перпендикулярні площині проекцій, і **косокутні**, коли напрямок проекціювання утворює із площиною проекцій кут не рівний 90°.

У такий спосіб **ортогональне** (**прямокутне**) проекціювання є окремим випадком паралельного й отримана цим методом **проекція об'єкта** називається **ортогональною**.

Ортогональному проекціюванню притаманні усі властивості паралельного і центрального проекціювання і крім того, справедлива теорема про проекціювання прямого кута: **якщо хоча б одна сторона прямого кута паралельна площині проекцій, а друга не перпендикулярна їй, то прямий кут на цю площину проекцюється в прямий кут.**

До проекційних зображень у нарисній геометрії ставляються наступні вимоги:

1.**Оборотність** – відновлення оригіналу по його проекційних зображеннях (кресленню) – можливість визначати форму і розміри об'єкта, його положення і зв'язок з навколишнім середовищем.

2.**Наочність** – креслення повинне створювати просторове представлення про форму предмета.

3.**Точність** – графічні операції, виконані на кресленні, повинні давати досить точні результати.

4.**Простота** – зображення повинне бути простим по побудові і повинне допускати однозначний опис об'єкта у вигляді послідовності графічних операцій.

1.3. Метод Монжа

Якщо інформацію про відстань точки щодо площини проекції визначити неможливо , то це можливо за допомогою другої проекції точки, побудованої на другій площині проекцій, то креслення називають двохкартинним чи **комплексним**. Основні принципи побудови таких креслень викладені Монжем.

Відповідно до методу запропонованого Монжем розглянемо в просторі дві взаємно перпендикулярні площини проекцій (рис.1.3). Одну з площин проекцій $\mathbf{П_1}$ розташовують горизонтально, а другу $\mathbf{П_2}$ - вертикально. $\mathbf{П_1}$ - горизонтальна площина проекцій, $\mathbf{П_2}$- фронтальна. Площини нескінченні і непрозорі.

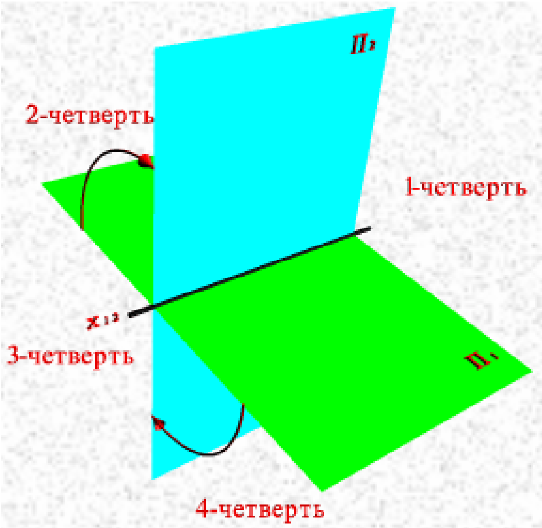


Рис.1.3 - Просторова модель двох площин проекцій

Площини проекцій поділяють простір на чотири двогранних кути – чверті. Розглядаючи ортогональні проекції, припускають, що спостерігач знаходиться в першій чверті на нескінченно великій відстані від площин проекцій.

Лінія перетину площин проекцій називається віссю координат і позначається $\mathbf{X_{12}}$.

Тому що ці площини непрозорі, то видимими для спостерігача будуть тільки ті геометричні об’єкти, що розташовуються в межах тієї ж першої чверті.

Щоб одержати плоске креслення, що складається з зазначених проекцій, площину $\mathbf{П_1}$ суміщують обертанням навколо осі $\mathbf{X_{12}}$ із площиною $\mathbf{П_2}$ (рис.1.3). Проекційне креслення, на якому площини проекцій із усім тим, що на них зображене, суміщені певним чином одна з іншою, називається **епюром** (Франц. Epure – креслення.).**Епюр** часто називають **епюром Монжа.**

Геометричні об’єкти поділяються на: **лінійні** (точка, пряма, площина), нелінійні (крива лінія, поверхня) і **складені** (багатогранники, одномірні і двовимірні обводи).

1.4.Точка

Геометричний об’єкт будь-якої складності можна розглядати як геометричне місце точок, по взаємному розташуванню, яких можна скласти уявлення про об’єкт, а по розташуванню їх щодо системи координат можна судити про положення його в просторі.

1.4.1.Точка в ортогональній системі двох площин проекцій

При побудові проекції необхідно пам’ятати, що ортогональною проекцією точки на площину називається основа перпендикуляра, опущеного з даної точки на цю площину. На рис. 1.4. показана точка A та її ортогональні проекції A_1 і A_2.

Точку $\mathbf{A_1}$ називають **горизонтальною проекцією** точки **A**, точку $\mathbf{A_2}$ - її **фронтальною проекцією**. Проекції точки завжди розташовані на прямих, які перпендикулярні до осі $\mathbf{X_{12}}$ і перетинають цю вісь в одній і тій же точці $\mathbf{A_X}$.

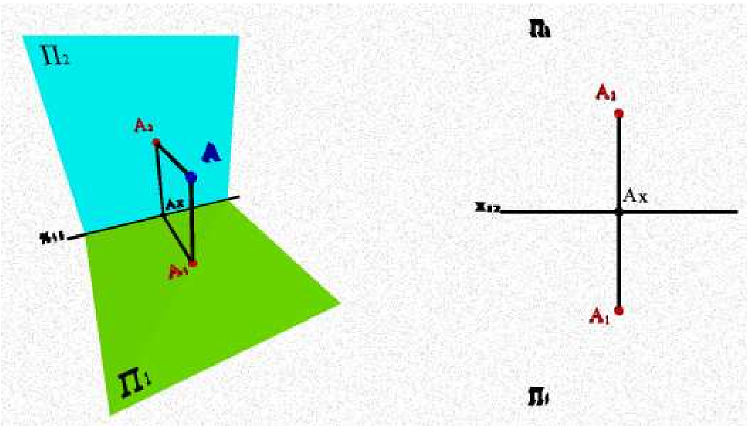


Рис.1.4 - Точка в системі двох площин проекцій

Справедливо і зворотне, тобто якщо на площинах проекцій дані точки $\mathbf{A_1}$ і $\mathbf{A_2}$ розташовані на прямих, що перетинають вісь $\mathbf{X_{12}}$ у точці $\mathbf{A_X}$ під прямим кутом, то вони є проекцією деякої точки **A**.

На епюрі Монжа проекції $\mathbf{A_1}$ і $\mathbf{A_2}$ виявляються розташованими на одному перпендикулярі до осі $\mathbf{X_{12}}$. При цьому відстань $\mathbf{A_1A_X}$ -від горизонтальної проекції точки до осі дорівнює відстані від самої точки **A** до площини $\textbf{П}_2$, а відстань$\textbf{A}_2\textbf{A}_X$ - від фронтальної проекції точки до осі дорівнює відстані від самої точки **А** до площини $\textbf{П}_1$.

Прямі лінії, що з'єднують різнойменні проекції точки на епюрі, називаються **лініями проекційного зв'язку.**

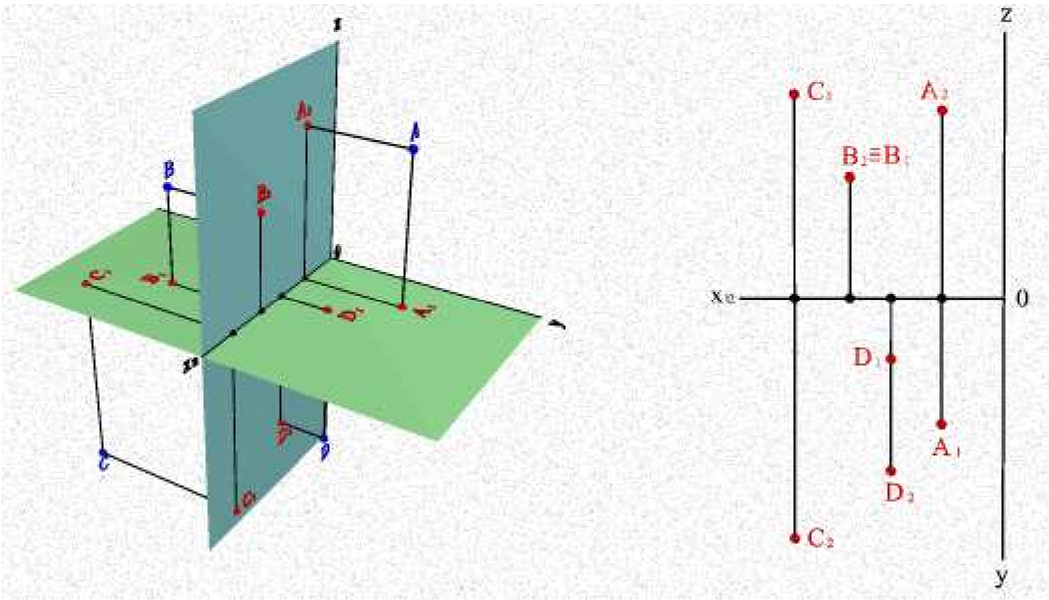


Рис. 1.5 - Точки в різних чвертях простору

На рис 1.5 представлені точки A, B, C, D, розташовані в різних чвертях простору і їхній епюр (**А**- у першій чверті, **В**-в другій, **С**- у третій і **D**-четвертій чверті).

1.4.2.Точка в ортогональній системі трьох площин проекцій

У практиці зображення різних геометричних об'єктів, щоб зробити проекційне креслення більш ясним, виникає необхідність використовувати третю – профільну площину проекцій $\textbf{П}_3$, розташовану перпендикулярно до $\textbf{П}_1$ і $\textbf{П}_2$. Відповідно до ГОСТ 2.305-68 площини проекцій $\textbf{П}_1$, $\textbf{П}_2$ і $\textbf{П}_3$ відносяться до основних площин проекцій.

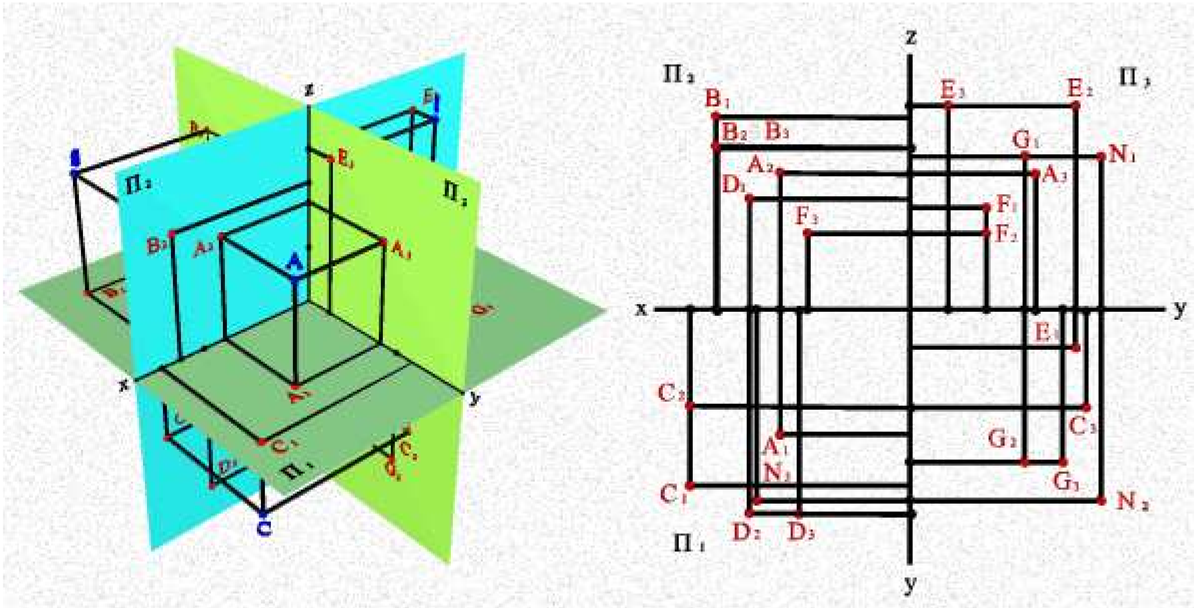


Рис. 1.6 - Точка в системі трьох площин проекцій

Модель трьох площин проекцій показана на рис. 1.6. Третя площина, перпендикулярна до **$П_1$** і **$П_2$**, позначається як **$П_3$** і називається **профільною**.

Проекції точок на цю площину позначаються великими літерами або цифрами з індексом **3**.

Площини проекцій, попарно перетинаючись, визначають три осі **OX**, **OY** і **OZ**, які можна розглядати як систему декартових координат у просторі з початком у точці **O**.

Три площини проекцій поділяють простір на вісім тригранних кутів - октантів. Як і раніше, будемо вважати, що глядач, що розглядає предмет, знаходиться в першому октанті.

Для одержання епюра точки в системі трьох площин проекцій, площини **$П_1$** і **$П_3$** обертають, як показано на рис. 1.7, до суміщення з площиною **$П_2$**. При позначенні осей на епюрі від'ємні півосі, звичайно, не вказують. Якщо істотно тільки саме зображення предмета, а не його положення щодо площин проекцій, то осі на епюрі не показують.

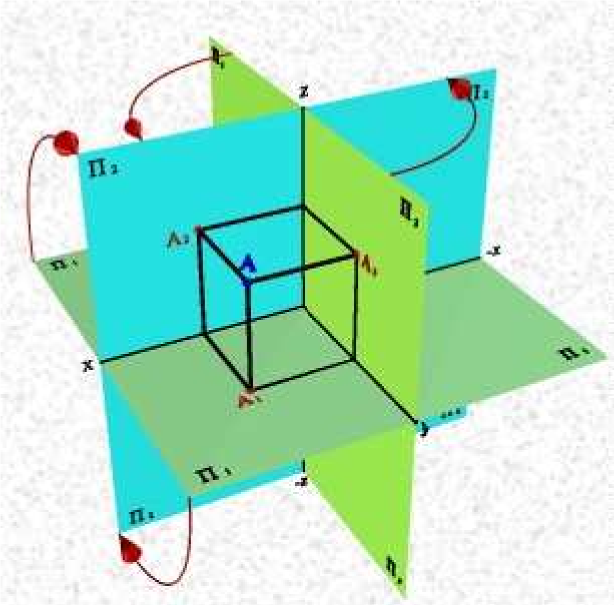


Рис. 1.7 - Одержання епюра

Координатами називають числа, що ставлять у відповідність точці для визначення її положення в просторі або на поверхні. У тривимірному просторі положення точки встановлюють за допомогою прямокутних декартових координат **X** , **Y** і **Z** (абсциса, ордината й апліката).

1.4.3.Конкуруючі точки

Якщо в точок рівні дві однойменні координати, то вони називаються **конкуруючими**. Конкуруючі точки розташовані на одній проекціюючій прямій. На рис. 1.9 дані три пари таких точок, у яких:

$X_A=X_D;\ Y_A=Y_D;\ Z_A>Z_D;$

$\mathbf{X_A=X_C;\ Z_A=Z_C;\ Y_A>Y_C;}$

$\mathbf{Y_A=Y_B;\ Z_A=Z_B;\ X_A>X_B;}$

Відповідні проекції конкуруючих точок **збігаються**.

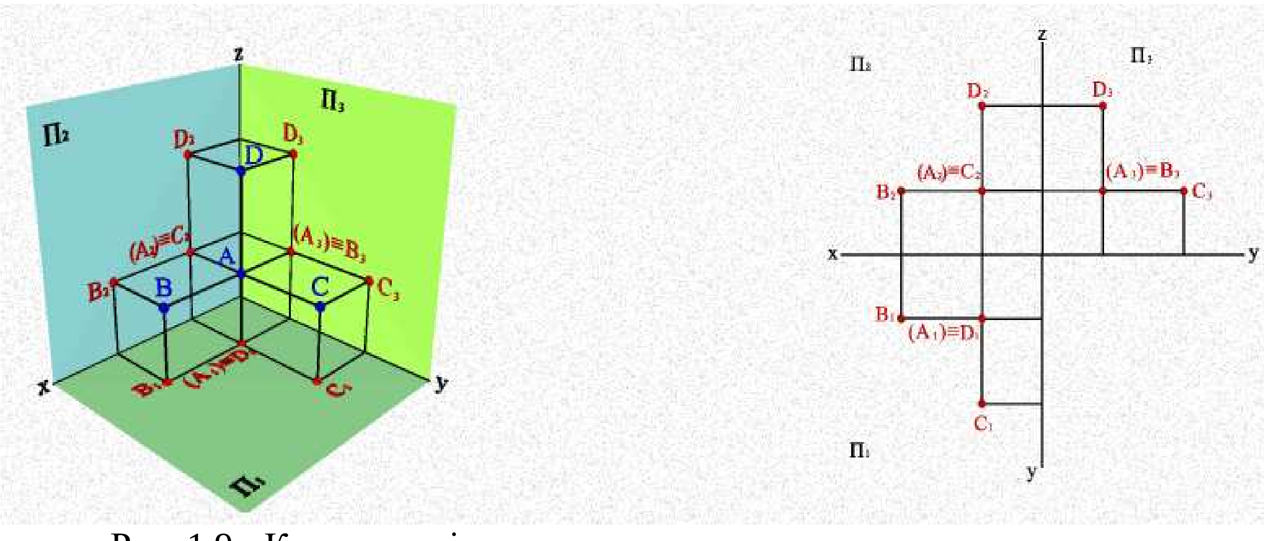


Рис. 1.9 - Конкуруючі точки

Розрізняють: **горизонтально конкуруючі точки А** і **D**, розташовані на горизонтально проекцюючій прямій **AD** ; **фронтально конкуруючі точки А** і **С** розташовані на фронтально проекцюючій прямій **АС**; **профільно конкуруючі точки А** і **В**, розташовані на профільно проекцюючій прямій **АВ**.

При проекціюванні на відповідну площину проекцій одна точка «закриває» іншу точку, яка конкурує з нею, і відповідна проекція цієї точки виявиться **невидимою**.

Запитання для самоперевірки:

1. Що означає термін «ортогональні проекції» ?
2. В якій чверті розташована точка, якщо її горизонтальна та фронтальна проекції розташовані вище осі ОХ ?
3. Яке положення займає точка в просторі, якщо її горизонтальна проекція розташована на осі ОХ ?
4. Де розташована профільна проекція точки, якщо її горизонтальна та фронтальна проекції належать осі ОХ ?
5. Які основні види проекціювання ?
6. Які основні властивості ортогонального проекціювання ?
7. Які точки є конкуруючими ?

Лекція №2

2.1. Комплексне креслення прямої лінії

2.2. Положення прямої відносно площин проекцій

2.3. Сліди прямої

2.4. Взаємне розташування точки і прямої

2.5. Поділ відрізка прямої лінії в даному співвідношенні

2.6. Визначення довжини відрізка прямої лінії і кутів нахилу прямої до площин проекцій

2.7. Взаємне положення двох прямих

2.7.1. Паралельні прямі

2.7.2. Прямі, які перетинаються

2.7.3. Мимобіжні прямі

2.1. Пряма лінія

Пряма лінія - одне з основних понять геометрії. При систематичному викладі геометрії пряма лінія звичайно приймається за одне з вихідних понять, що лише непрямим образом визначається аксіомами геометрії. Якщо основою побудови в геометрії служить поняття відстані між двома точками простору, то **пряму лінію** можна визначити як лінію, уздовж якої відстань між двома точками є найкоротшою.

Розглянемо дві точки у просторі **A** і **B** (рис. 2.1). Через ці точки можна провести пряму лінію і одержимо відрізок [**AB**]. Для того щоб знайти проекції цього відрізка на площині проекцій необхідно знайти проекції точок **A** і **B**, і з'єднати їх прямою.

Кожна з проекцій відрізка на площині проекцій менше самого відрізка:

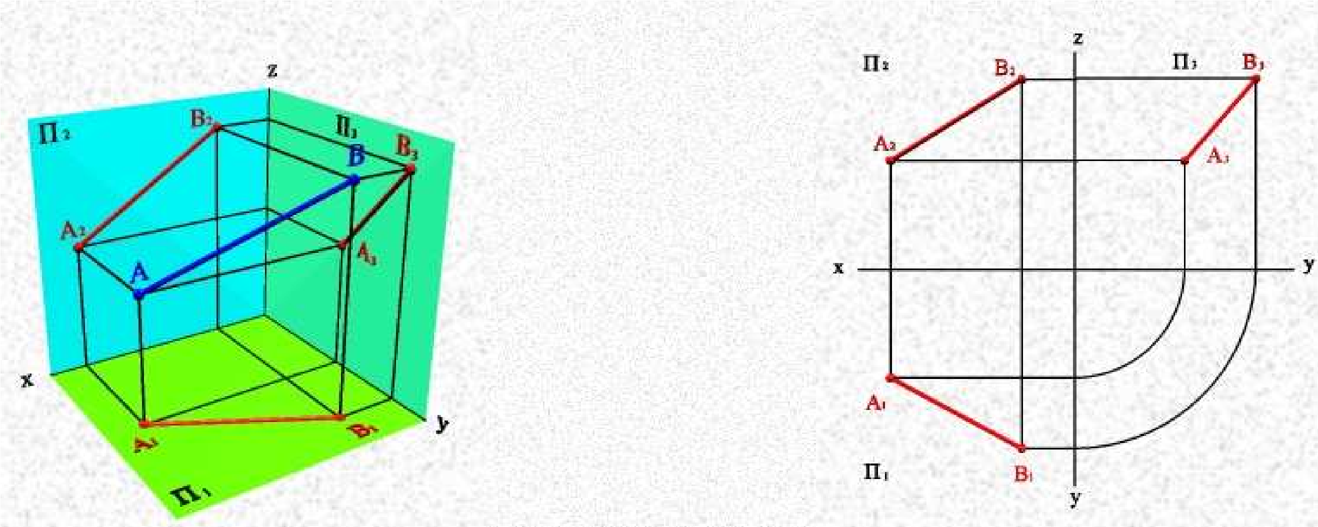


Рис.2.1 - Визначення положення прямої по двох точках

2.2. Положення прямої лінії відносно площин проекцій

1. Прямою загального положення називається пряма, не паралельна ні одній з площин проекцій, (рис. 2.1).

2. Прямі паралельні площинам проекцій, називаються прямими рівня. Кожна з них проектується на паралельну їй площину проекцій без спотворення.

2.А. Прямі паралельні до горизонтальної площини проекцій називаються горизонтальними або горизонталями (рис. 2.2).

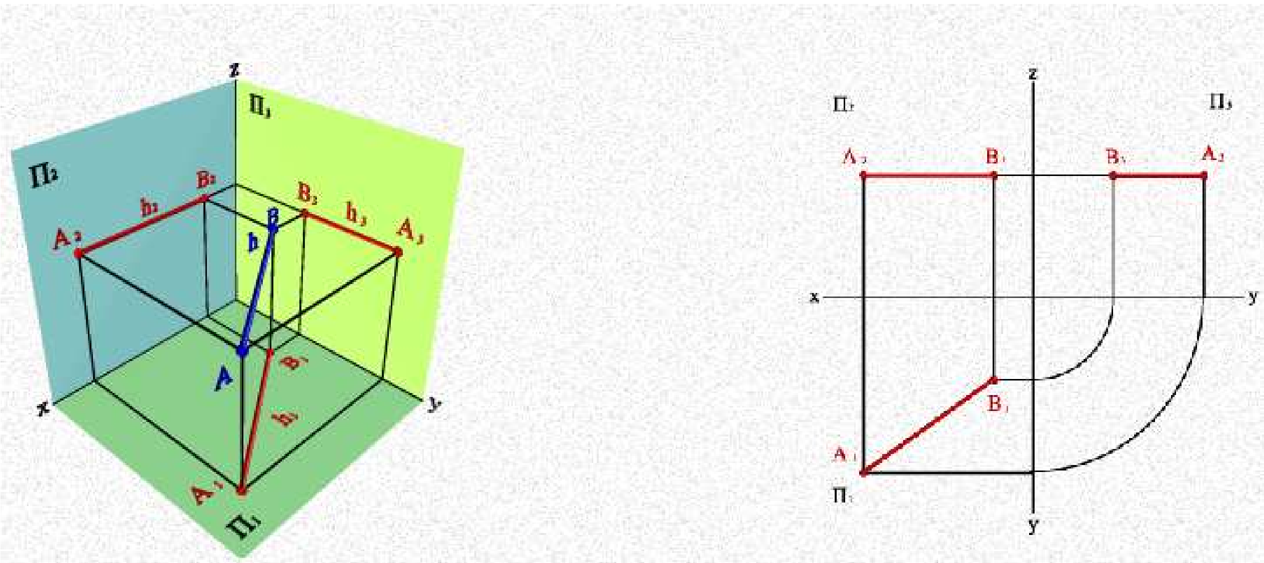


Рис. 2.2 - Горизонтальна пряма

Для будь-якої пари точок горизонталі буде справедливою рівність:

$Z_A = Z_B \Rightarrow A_2B_2 \parallel OX$, $Z_A = Z_B \Rightarrow A_3B_3 \parallel OY$,

2.Б. Прямі паралельні до фронтальної площини проекцій називаються фронтальними або фронталями, (рис. 2.3).

Для будь-якої пари точок фронталі буде справедливою рівність:

$$Y_A = Y_B \Rightarrow A_1B_1 \parallel OX,\ A_3B_3 \parallel OZ \Rightarrow X_A - X_B \neq 0,\ Y_A - Y_B = 0,\ Z_A - Z_B \neq 0.$$

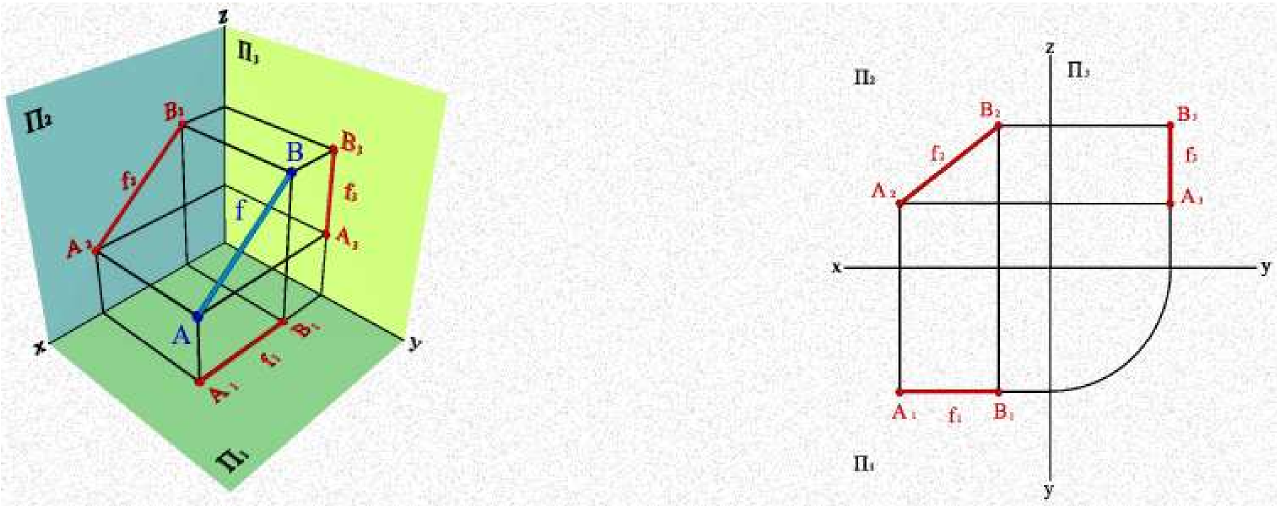


Рис. 2.3 - Фронтальна пряма

2.В. Прямі паралельні до профільної площини проекцій називаються профільними, (Рис. 2.4).

Для будь-якої пари точок профільної прямої буде справедливою рівність:

$$\boldsymbol{X_A = X_B \Rightarrow A_1B_1 \parallel OY,\ A_2B_2 \parallel OZ \Rightarrow X_A - X_B = 0,\ Y_A - Y_B \neq 0,\ Z_A - Z_B \neq 0.}$$

Розрізняють **висхідну** і **низхідну (спадну)** профільні прямі. Перша в міру віддалення від глядача **піднімається**, друга - **знижується**.

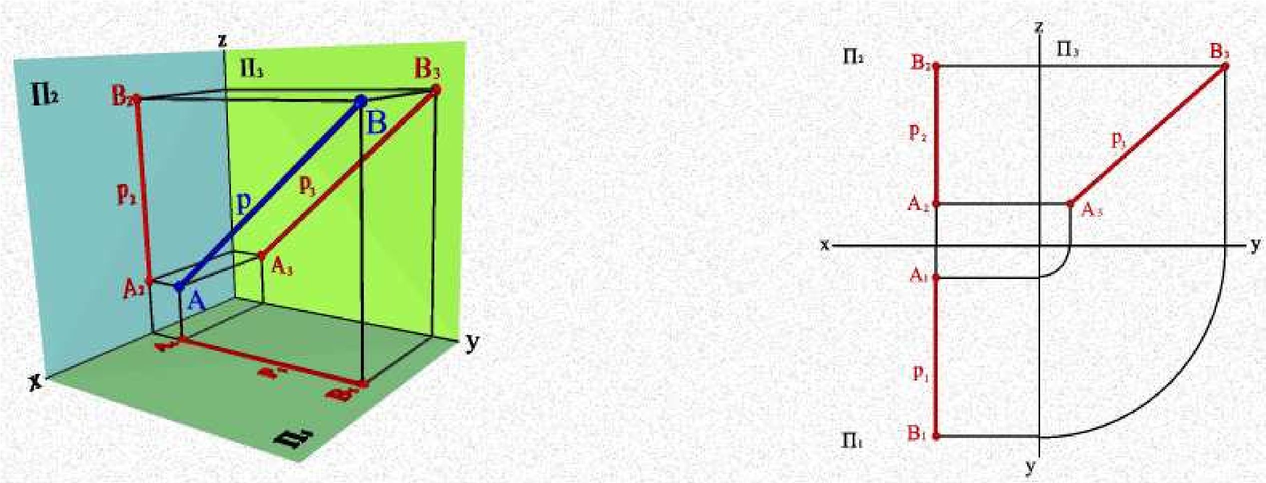
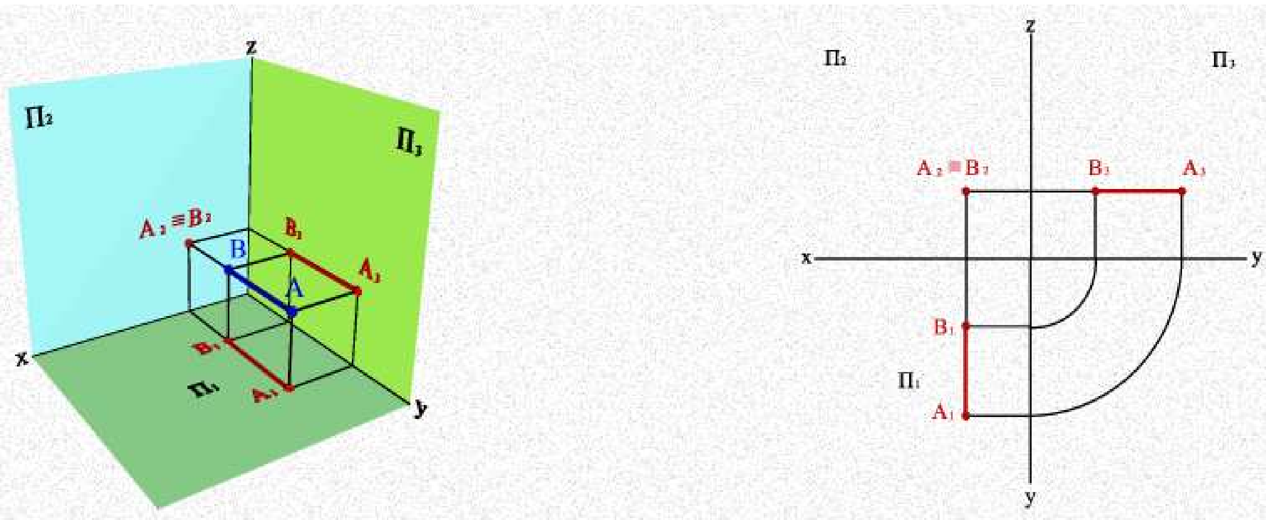


Рис. 2.4 - Профільна пряма

3. Прямі перпендикулярні до площин проекцій, називаються проектуючими.

3.А.Фронтально проектуюча пряма – АВ, це пряма перпендикулярна до Π_2 (рис. 2.5).

Для будь-якої пари точок фронтально проектуючої прямої будуть справедливими такі співвідношення:



$$\mathbf{X_A - X_B = 0,\ Y_A - Y_B \neq 0,\ Z_A - Z_B = 0.}$$

Рис. 2.5 - Фронтально проектуюча пряма

3.Б. Профільно проектуюча пряма - АВ,пряма перпендикулярна до $П_3$ (рис.2.6).

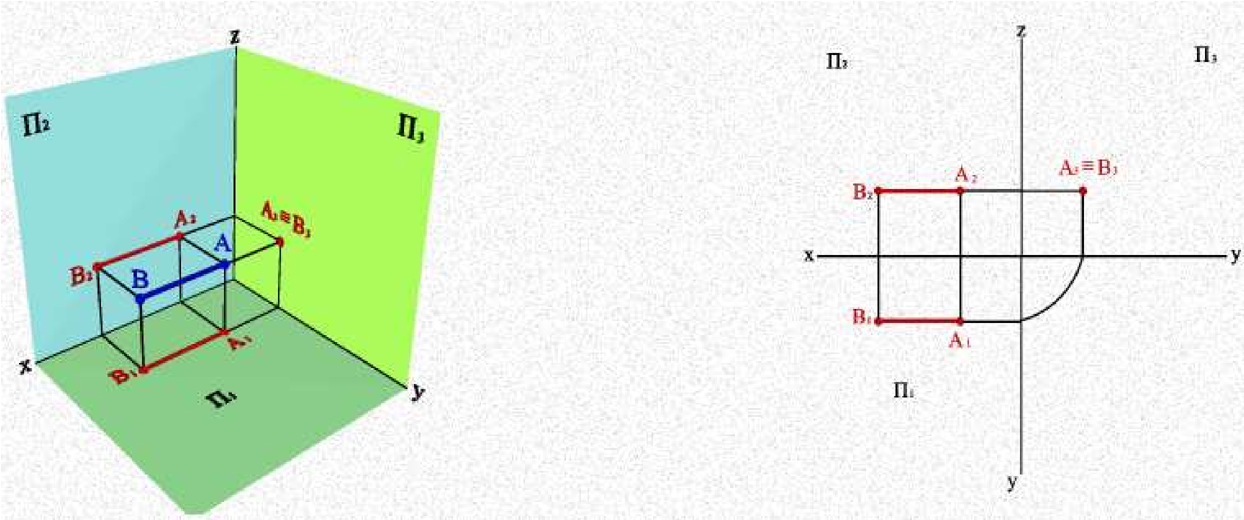


Рис. 2.6 - Профільно проектуюча пряма

Для будь-якої пари точок профільно проектуючої прямої будуть справедливими такі співвідношення:

$$\mathbf{X_A - X_B \neq 0,\ Y_A - Y_B = 0,\ Z_A - Z_B = 0.}$$

3.В. Горизонтально проектуюча пряма - АВ,це пряма перпендикулярна до $П_1$ (рис.2.7).

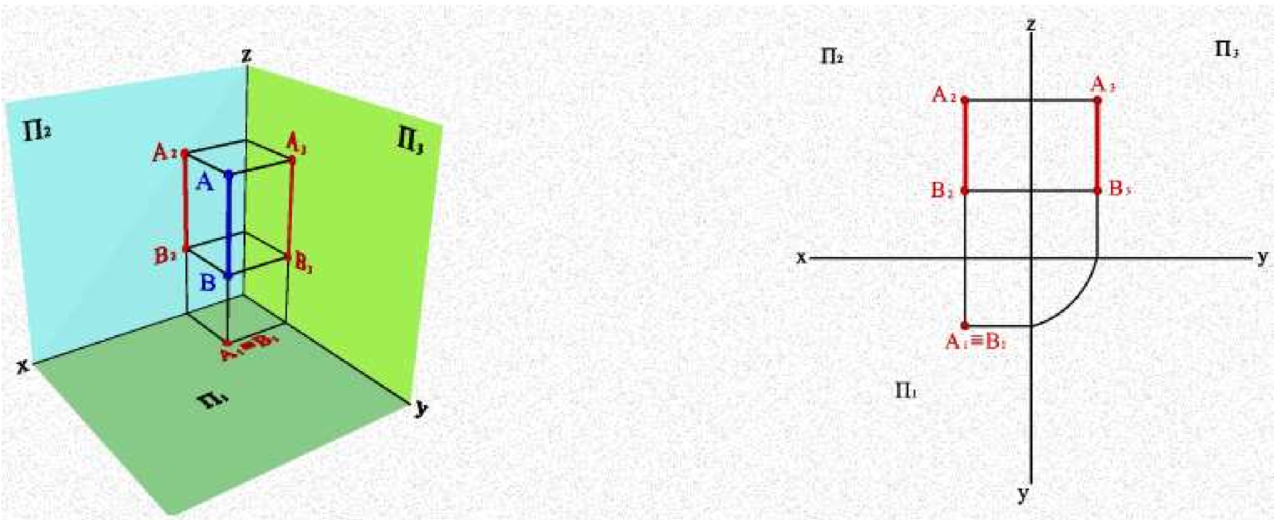


Рис. 2.7 - Горизонтально проектуюча пряма

Для будь-якої пари точок горизонтально проектуючої прямої будуть справедливими такі співвідношення:

$$X_A - X_B = 0,\ Y_A - Y_B = 0,\ Z_A - Z_B \neq 0.$$

2.3. Сліди прямої лінії

Слідом прямої лінії називається точка (рис. 2.8), **у якій пряма перетинається з площиною проекцій** (тому що слід належить одній з площин проекцій, то його одна координата повинна бути рівною нулю).

Горизонтальний слід - M (Z_M=0)- точка перетину прямої з горизонтальною площиною проекцій.

Фронтальний слід - N (Y_N=0)- точка перетину прямої з фронтальною площиною проекцій.

Профільний слід - T (X_T=0)- точка перетину прямої з профільною площиною проек

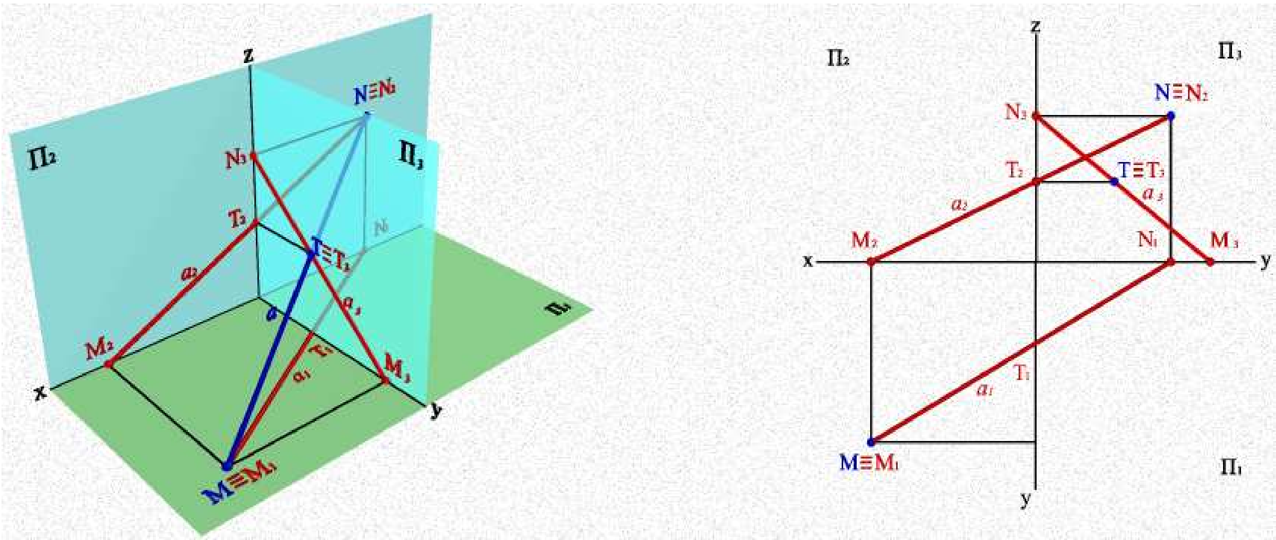


Рис. 2.8 - Сліди прямої лінії в системі трьох площин проекцій

Сліди прямої є точками окремого положення. Однойменні проекції сліду прямої збігаються із самим слідом, а інші проекції лежать на осях.

Наприклад, фронтальний слід прямої $N_2 \equiv N$, а N_1 лежить на осі **X**, N_3 - на осі **Z**.

Відзначені особливості в розташуванні слідів проекцій дозволяють сформулювати наступні правила:

1. Для побудови горизонтального сліду М прямої необхідно продовжити її фронтальну проекцію до перетину з віссю ОХ і в цій точці відновити перпендикуляр до осі, до перетину його з горизонтальною проекцією прямої.

2. Для побудови фронтального сліду N прямої потрібно з точки перетину горизонтальної проекції з віссю ОХ відновити перпендикуляр до перетину його з фронтальною проекцією прямої.

За допомогою цих правил знайдені на епюрі сліди прямої **а** (рис.2.9).

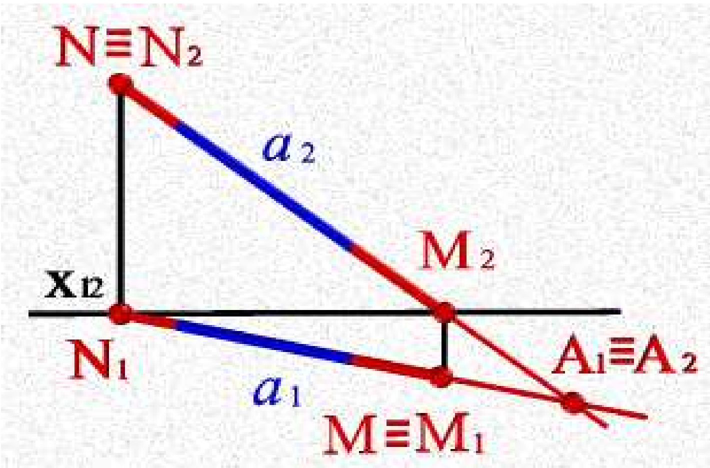


Рис.2.9 - Знаходження горизонтального і фронтального слідів прямої лінії

Сліди прямої, є точками, у яких пряма переходить з одного октанта в інший і дозволяють визначати її видимість.

Видимою частиною прямої буде та, котра розташована в межах першого октанта.

2.4. Взаємне розташування точки і прямої

Якщо точка належить прямій, то її проекції повинні належати однойменним проекціям цієї прямої (аксіома належності точки до прямої). З чотирьох запропонованих на малюнку точок, тільки одна точка **С** лежить на прямій АВ (Рис.2.10).

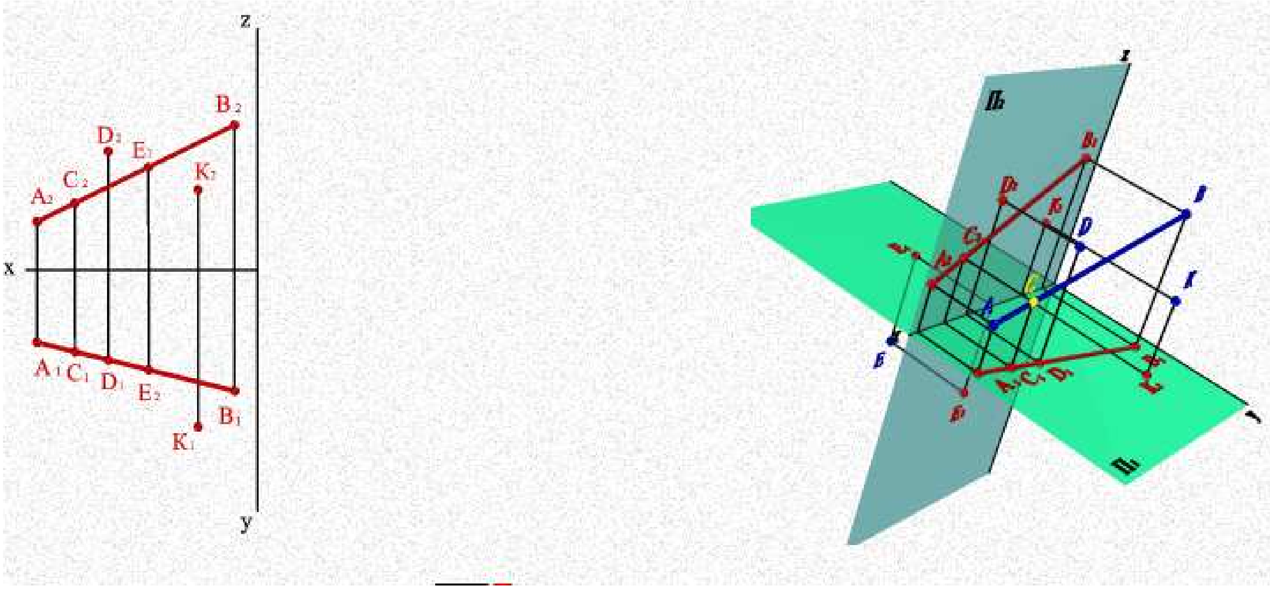


Рис. 2.10 - Взаємне розташування точки і прямої

У тих випадках коли точка і пряма лежать у площині рівня (паралельній до якої-небудь із площин проекцій $\mathbf{П_1}$, $\mathbf{П_2}$ чи $\mathbf{П_3}$), то питання про взаємне розташування прямої і точки вирішується при побудові проекцій на площину відповідно $\mathbf{П_1}$, $\mathbf{П_2}$ чи $\mathbf{П_3}$. Наприклад, пряма **АВ** і точка **К** лежать у площині паралельній до профільної площини проекцій (рис.2.11).

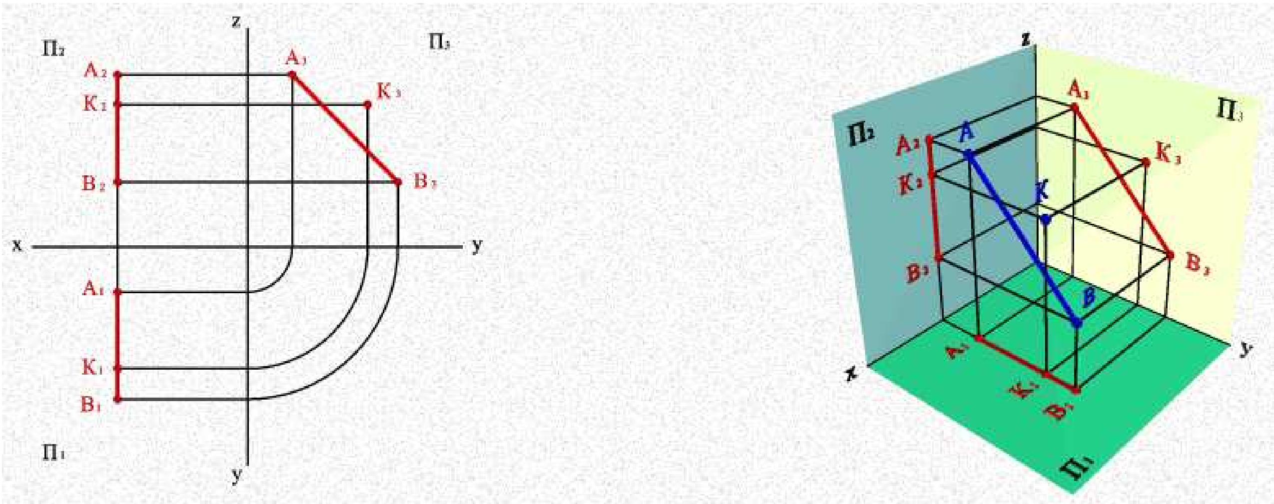


Рис. 2.11 - Точка і пряма, розташовані в профільній площині рівня

2.5. Поділ відрізка прямої лінії в даному співвідношенні

З властивостей паралельного проектування відомо, що якщо точка поділяє відрізок прямої в даному відношенні, то проекції цієї точки поділяють однойменні проекції прямої в тім же співвідношенні.

Тому, щоб деякий відрізок розділити на епюрі в даному співвідношенні, треба в тім же відношенні розділити його проекції.

Знаючи цю умову можна визначити належність точки **К** до прямої **АВ**:

$$\mathbf{A_2K_2 / K_2B_2 \neq A_1K_1/K_1B_1 \Rightarrow K \notin AB}$$

Розглянемо приклад:(рис.2.12). Щоб розділити відрізок **АВ** у відношенні 2:3 із точки $\mathbf{A_1}$ проведемо довільний відрізок $\mathbf{A_1B_1}$* розділений на 5-ть рівних частин

$$|\mathbf{A_1K_1}^*| = 2,\ |\mathbf{K_1}^*\mathbf{B_1}^*| = 3;\quad \mathbf{A_1K_1}^* / \mathbf{K_1}^*\mathbf{B_1}^* = 2/3$$

З’єднаємо точку $\mathbf{B_1}$* із точкою $\mathbf{B_1}$ і провівши з точки $\mathbf{K_1}$*пряму паралельну ($\mathbf{B_1B_1}$*) одержимо проекцію точки $\mathbf{K_1}$.

Відповідно до теореми Фалеса (Якщо на одній стороні кута відкласти рівні відрізки і через їхні кінці провести паралельні прямі, які перетинають іншу сторону, то на цій стороні відкладуться рівні між собою відрізки) $A_1K_1/\ K_1B_1 = 2/3$, далі знаходимо K_2. У такий спосіб проекції точки К поділяють однойменні проекції відрізка **АВ** у даному відношенні, отже і точка **К** поділяє відрізок **АВ** у **відношенні 2/3.**

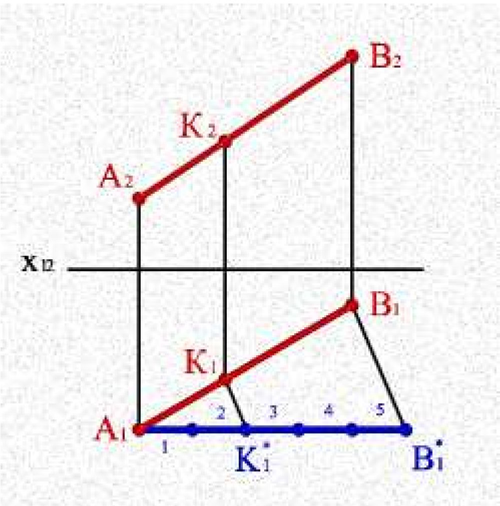


Рис. 2.12. - Поділ відрізка прямої

2.6. Визначення довжини відрізка прямої лінії і кутів нахилу прямої до площин проекцій

Довжину відрізка **AB** можна визначити з прямокутного трикутника **ABC** $|AC|=|A_1B_1|$, $|BC|=\Delta Z$, кут α-кут нахилу відрізка до площини Π_1, β-кут нахилу відрізка до площини Π_2.

Для цього на епюрі (рис.2.13) із точки B_1 під кутом **90º** проводимо відрізок $|B_1B_1^*|=\Delta Z$, отриманий у результаті побудов відрізок $A_1B_1^*$і буде **натуральною величиною** відрізка **AB**, а кут $B_1A_1B_1^* =\alpha$.

Розглянутий метод називається **методом прямокутного трикутника**. Однак усі побудови можна пояснити, як обертання трикутника **ABC** навколо сторони **AC** доти, поки він не стане паралельний до площини Π_1, у цьому випадку трикутник проектується на площину проекцій без спотворення.

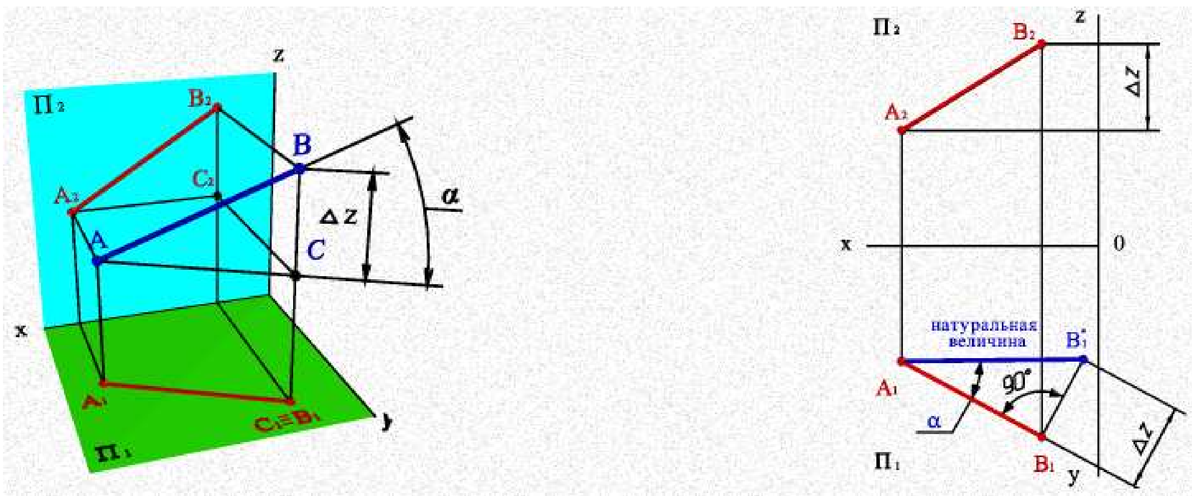


Рис. 2.13 - Визначення натуральної величини відрізка та кута його нахилу до Π_1.

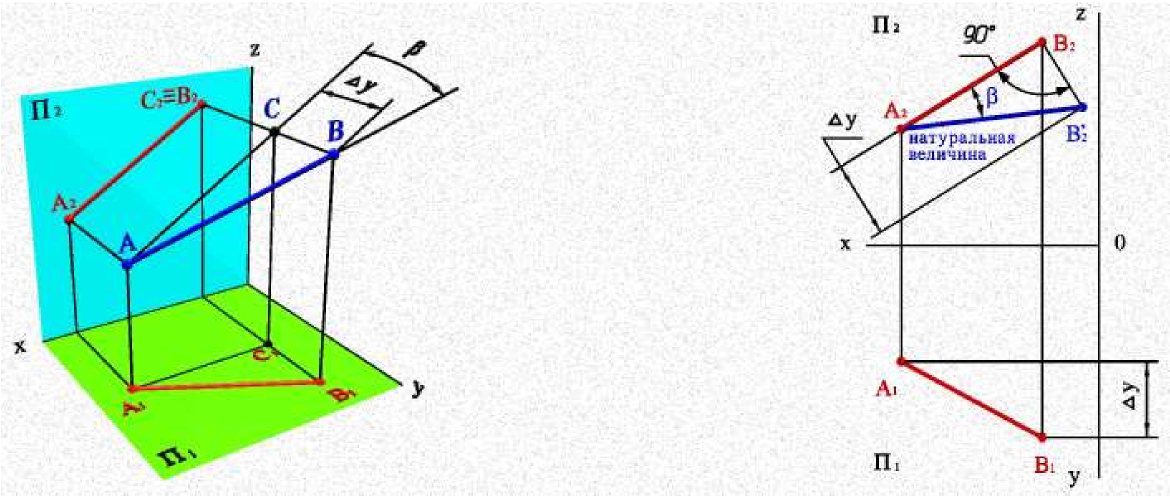


Рис. 2.14 - Визначення натуральної величини відрізка і кута його нахилу до $\mathbf{\Pi_2}$

Для визначення β-кута нахилу відрізка до площини $\mathbf{\Pi_2}$ побудови аналогічні (рис.2.14). Тільки в трикутнику **ABB*** сторона |**BB***|=Δ**Y** і трикутник суміщається з площиною $\mathbf{\Pi_2}$.

2.7. Взаємне положення двох прямих

Прямі лінії в просторі можуть бути паралельними, перетинатися і мимобіжними. Розглянемо докладніше кожен випадок:

2.7.1. Паралельні прямі

Паралельними називаються дві прямі, що лежать в одній площині і не мають спільних точок.

Проекції паралельних прямих на будь-яку площину (не перпендикулярну даним прямим) - паралельні.

Якщо AB// CD то $A_1B_1 // C_1D_1$; $A_2B_2 // C_2D_2$; $A_3B_3 // C_3D_3$ (рис. 2.15)

У загальному випадку справедливо і зворотне твердження.

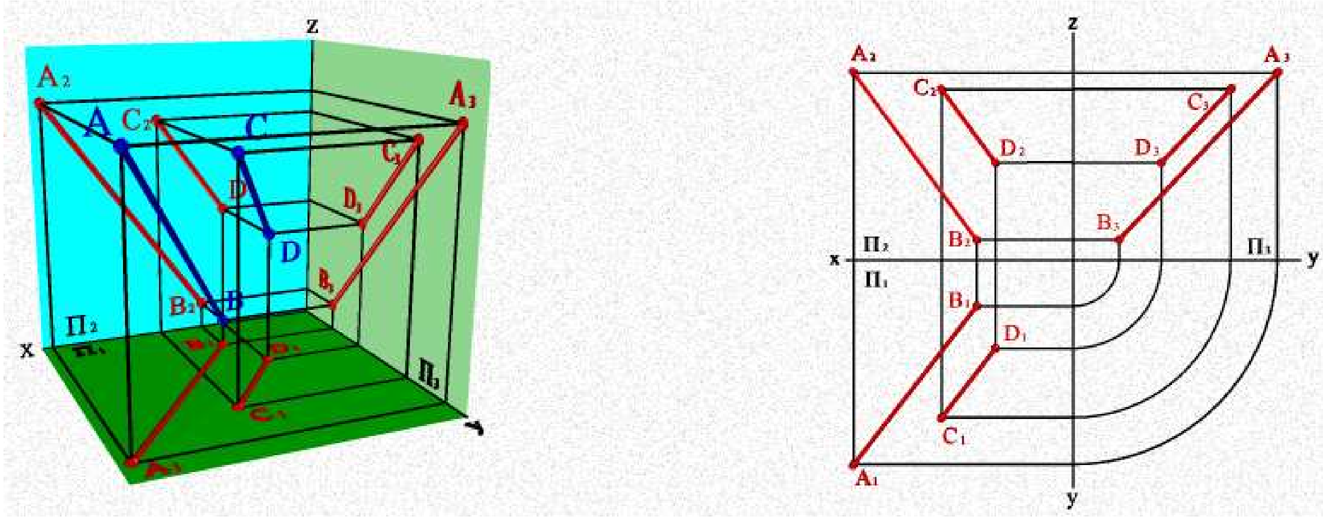


Рис.2.15 - Паралельні прямі

Особливий випадок являють собою прямі, паралельні до однієї з площин проекцій. Наприклад, фронтальні і горизонтальні проекції профільних прямих паралельні, але для оцінки їхнього взаємного положення необхідно зробити проекцію на профільну площину проекцій (рис.2.16).

Рішення цього питання можна одержати порівнянням двох співвідношень якщо:

$$\mathbf{A_2B_2 / A_1B_1 = C_2D_2 / C_1D_1 \Rightarrow \mathit{AB} \parallel CD}$$

$$\mathbf{A_2B_2 / A_1B_1 \neq C_2D_2 / C_1D_1 \Rightarrow \mathit{AB} \neq CD}$$

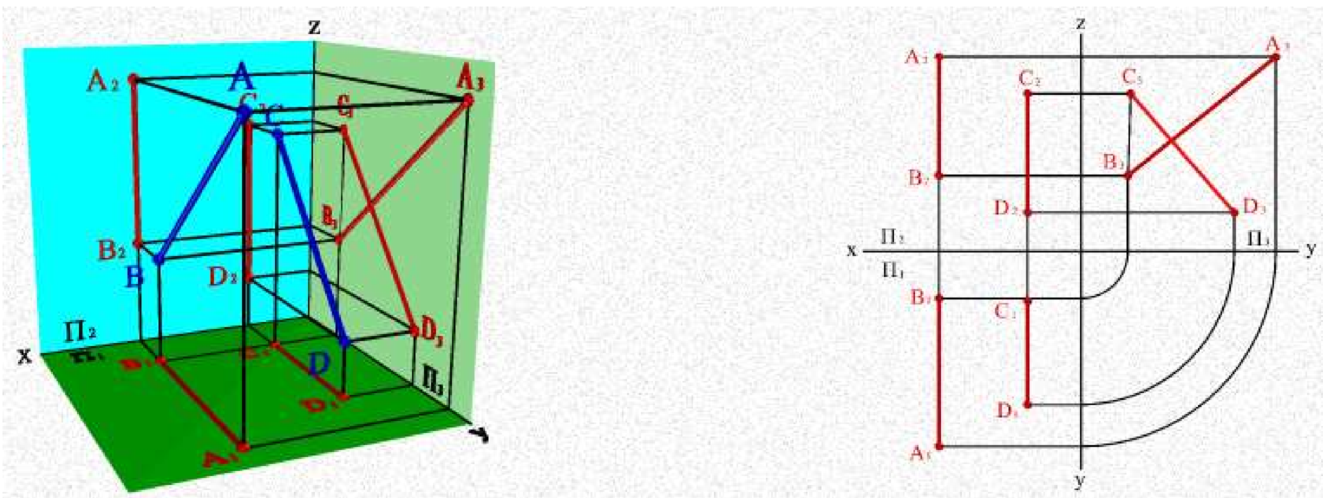


Рис.2.16 - Прямі паралельні до профільної площини проекцій

2.7.2. Прямі, що перетинаються

Прямими, які перетинаються називаються дві прямі, що лежать в одній площині і мають одну спільну точку.

Якщо прямі перетинаються, то точки перетину їхніх однойменних проекцій знаходиться на одній лінії проекційного зв'язку (рис2.17).

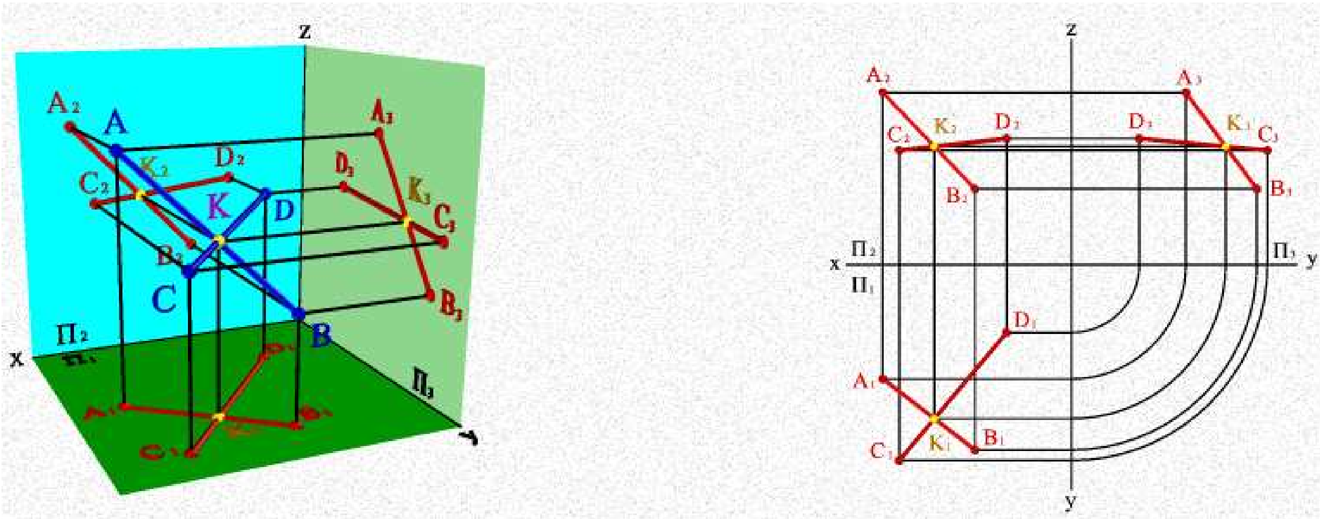


Рис.2.17 - Прямі, що перетинаються

2.7.3.Мимобіжні прямі

Мимобіжними називаються дві прямі, які не лежать в одній площині.

Якщо прямі не перетинаються і не паралельні між собою, то точка перетину їх однойменних проекцій не лежить на одній лінії проекційного зв'язку.

Точці перетину фронтальних проекцій прямих (рис.2.18) відповідають дві точки **A** і **B**, з яких одна належить прямій **a**, інша-**b**. Їхні фронтальні проекції збігаються лише тому, що в просторі обидві точки **A** і **B** знаходяться на загальному перпендикулярі до фронтальної площини проекцій.

Горизонтальна проекція цього перпендикуляра, позначена стрілкою, дозволяє установити, яка з двох точок ближче до спостерігача. На запропонованому прикладі ближче - точка **B,** яка лежить на прямій **b**, отже, пряма **b** проходить у цьому місці ближче прямої **a** і фронтальна проекція точки **B** закриває проекцію точки **A**. (Для точок **C** і **D** рішення аналогічне).

Цей спосіб визначення видимості має назву **по конкуруючих точках**. У даному випадку точки **A** і **B**- **фронтально конкуруючі**, а **C** і **D** - горизонтально конкуруючі.

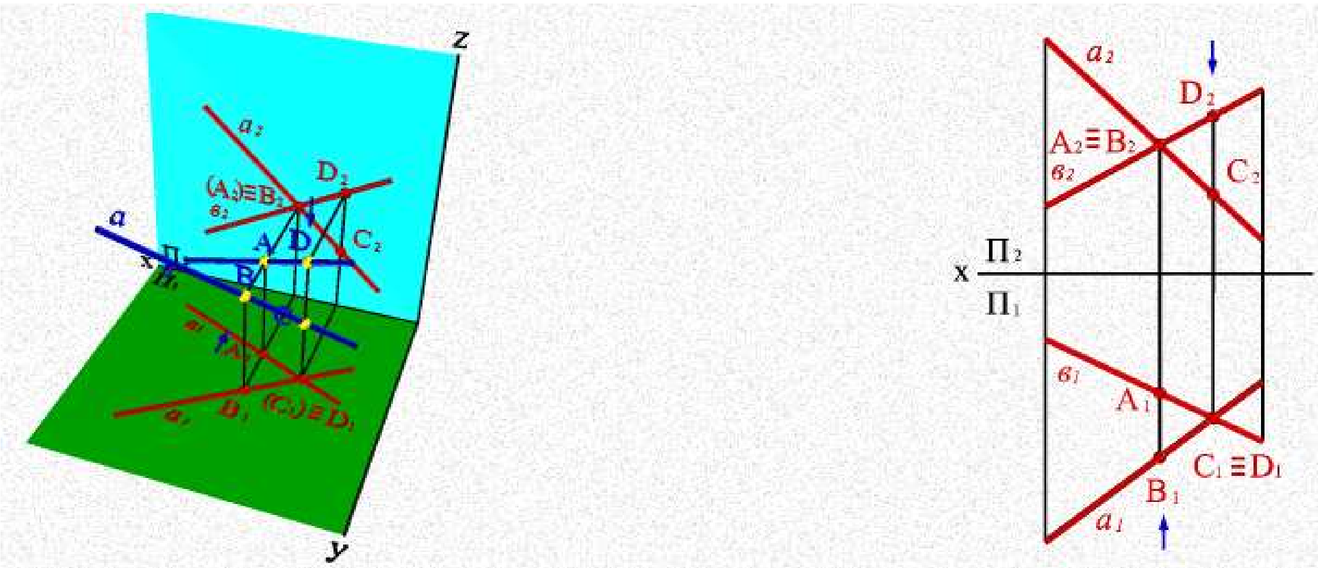


Рис.2.18 - Мимобіжні прямі

Запитання для самопідготовки:

1. Як виглядає на комплексному кресленні пряма загального положення ?

2. Як називається пряма, фронтальна проекція якої паралельна осі OX?

3. У якої прямої горизонтальна і фронтальна проекції паралельні до осі OX і як ця пряма називається ?

4. Яке положення в просторі займає пряма, якщо її фронтальна проекція – точка на осі OX ?

5. Яке положення в просторі займає пряма, якщо її фронтальна і горизонтальна проекції розташовані на осях OZ і OY відповідно ?

6. Яке взаємне положення прямих у просторі, якщо їхні фронтальні проекції паралельні, а горизонтальні перетинаються ?

7. Чи можуть мимобіжні прямі мати паралельні фронтальні та горизонтальні проекції ?

8. Як визначити на кресленні, чи належить точка до прямої ?

9. Як побудувати на кресленні сліди прямої ?

10. Як визначити на кресленні кут нахилу прямої до площини $П_1$?

Лекція №3

3.1.Площина

3.2. Способи графічного задання площин

3.3. Положення площини щодо площин проекцій

3.4. Сліди площини

3.5. Головні лінії в площині

3.6. Взаємне розташування прямої і площини

3.7. Взаємне розташування точки і площини

3.8. Взаємне розташування площин

3.1. Площина

Площина в лінійній алгебрі – поверхня першого порядку: у Декартові системі координат площина може бути задана рівнянням 1-го ступеня.

Загальне рівняння площини: **Ax+By+Cz+D=0,**

де **A**, **B**, **C**, і **D** - постійні, причому **A, B** і **C** одночасно не дорівнюють нулю.

3.2. Способи графічного задання площин

Положення площини в просторі можна визначити:

1. Трьома точками, що не лежать на одній прямій лінії

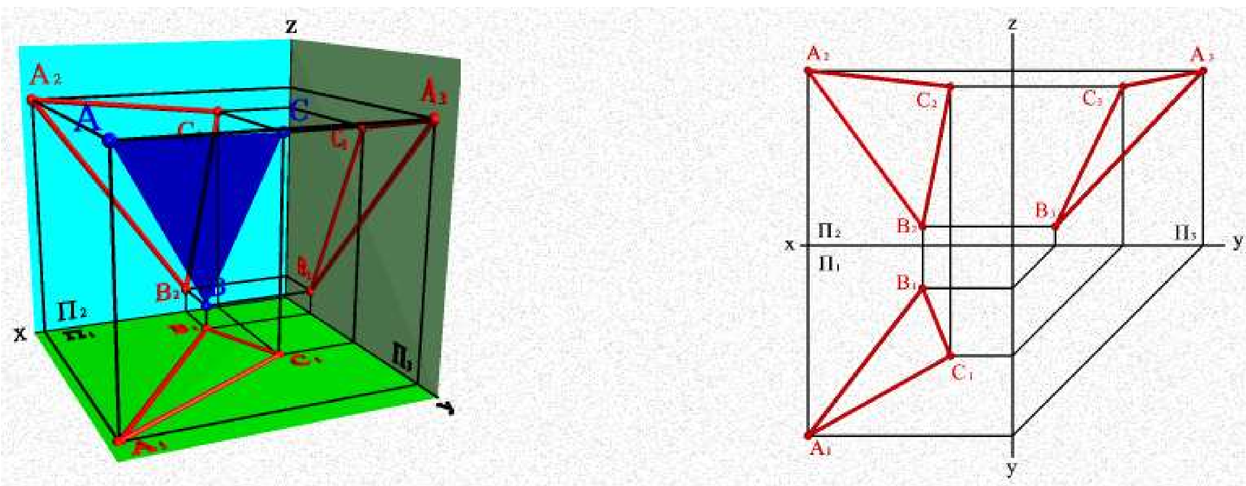


Рис. 3.1 - Площина задана трьома крапками, що не лежать на одній прямій

2. Прямою лінією і точкою, що не належить цій прямій

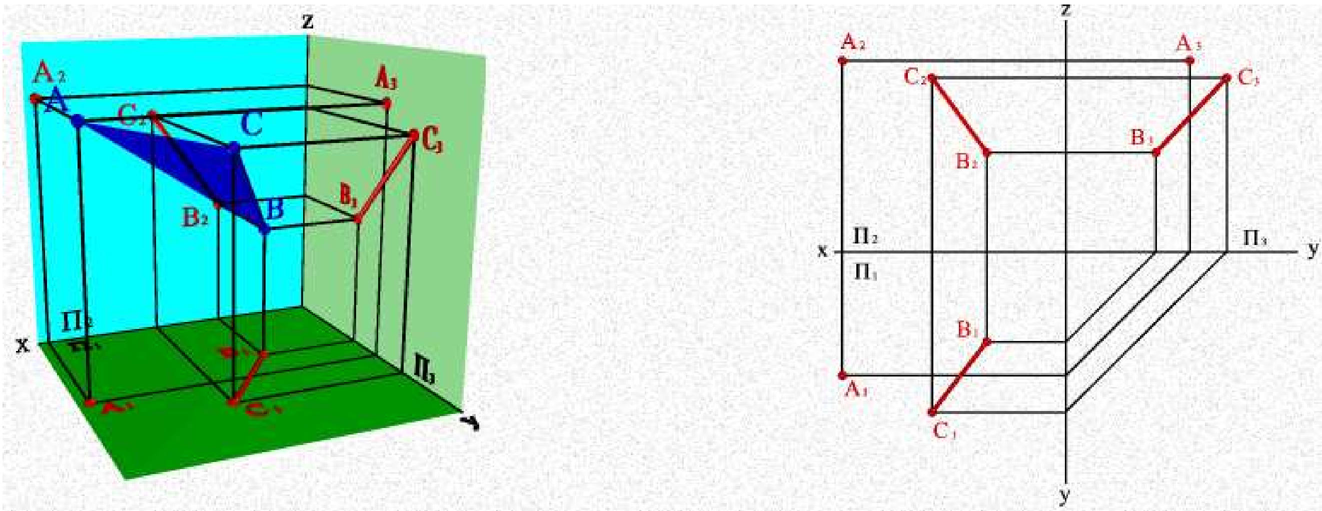


Рис. 3.2 - Площина задана прямою лінією і точкою, яка не належить цій лінії

3. Двома прямими, які перетинаються (рис.3.3);

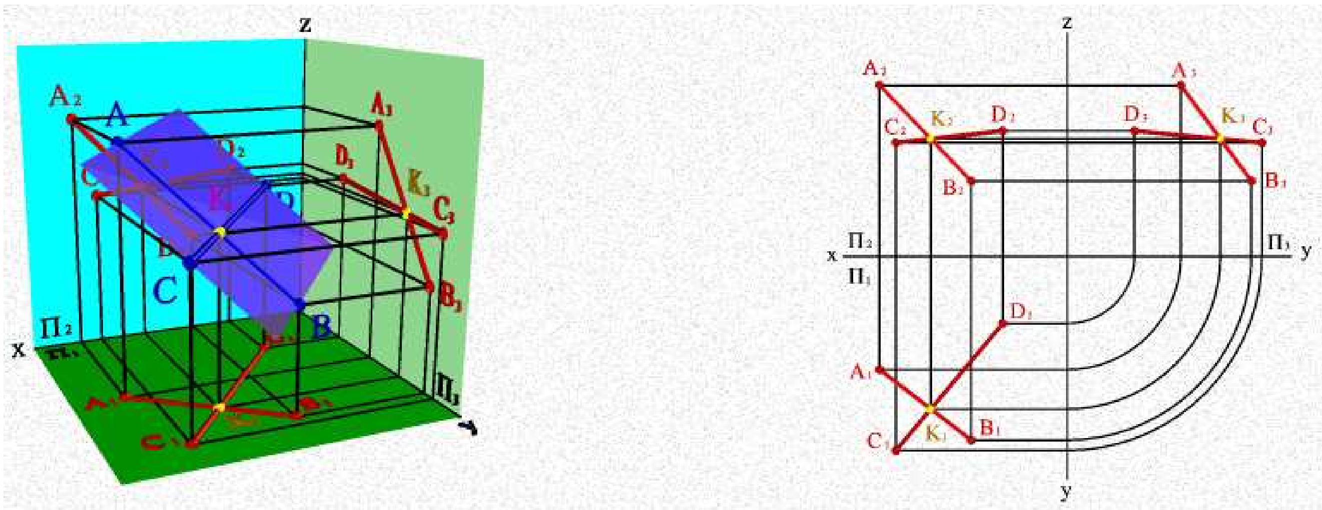


Рис. 3.3 - Площина задана двома прямими лініями, що перетинаються

4. Двома паралельними прямими (рис.3.4);

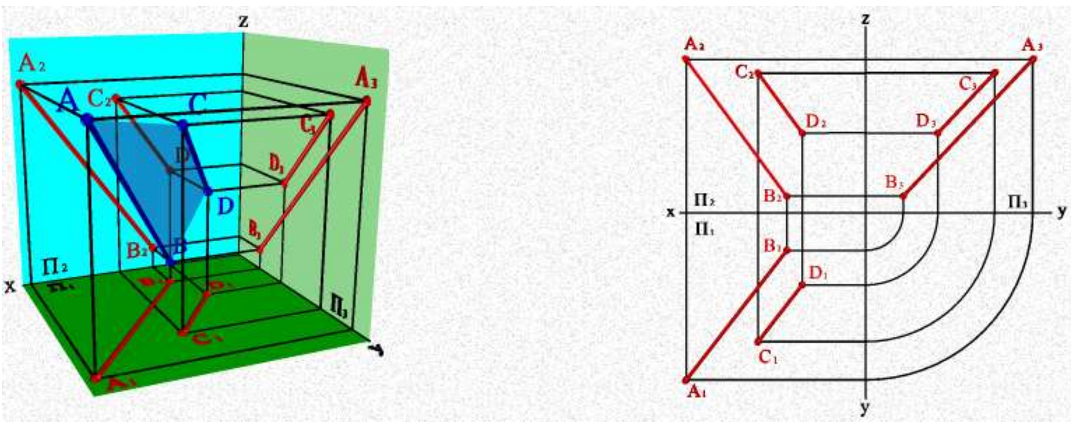


Рис. 3.4 - Площина задана двома паралельними прямими лініями

5. Про положення площини щодо площин проекцій зручно судити по її слідах - прямим лініям по яких площина перетинається з площинами проекцій (рис. 3.5).

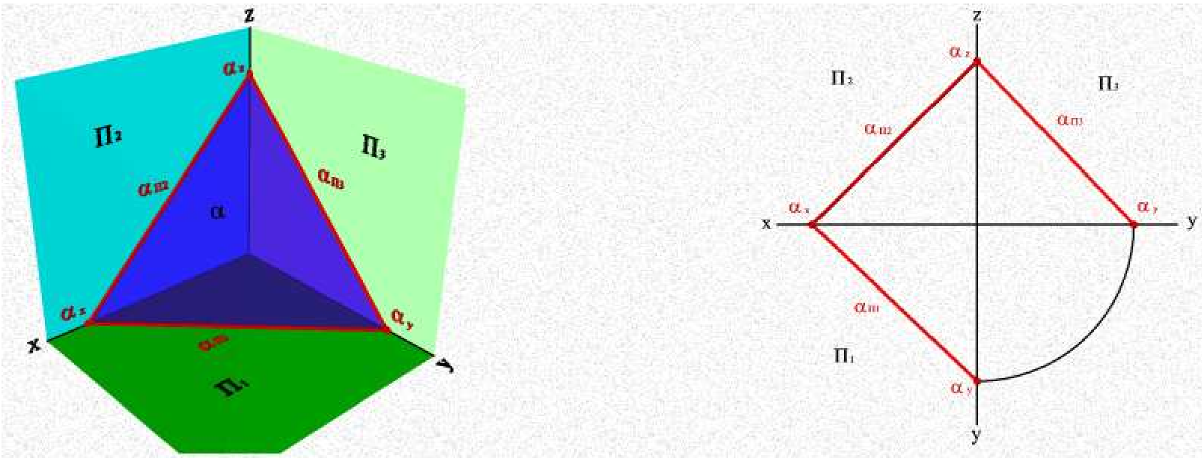


Рис. 3.5 - Площина задана слідами

3.3. Положення площини щодо площин проекцій

1. Площина загального положення (не перпендикулярна ні до однієї площини проекцій) має три сліди: горизонтальний - $\alpha_{П1}$; фронтальний - $\boldsymbol{\alpha_{п2}}$; профільний -$\boldsymbol{\alpha_{п3}}$.

Сліди площини загального положення перетинаються попарно на осях у точках α_x, α_y, α_z. Ці точки називаються **точками сходу слідів**, їх можна розглядати як вершини тригранних кутів, утворених даною площиною з двома із трьох площин проекцій. Кожний зі слідів площини збігається зі своєю однойменною проекцією, а дві інші різнойменні проекції лежать на осях (рис.3.5).

2. **Площина перпендикулярна до горизонтальної площини проекцій** ($\alpha \perp П_1$), називається **горизонтально проектуючою** площиною. Горизонтальна проекція такої площини являє собою пряму лінію, що одночасно є її горизонтальним слідом. Горизонтальні проекції всіх точок будь-яких фігур у цій площині збігаються з горизонтальним слідом (рис.3.6).

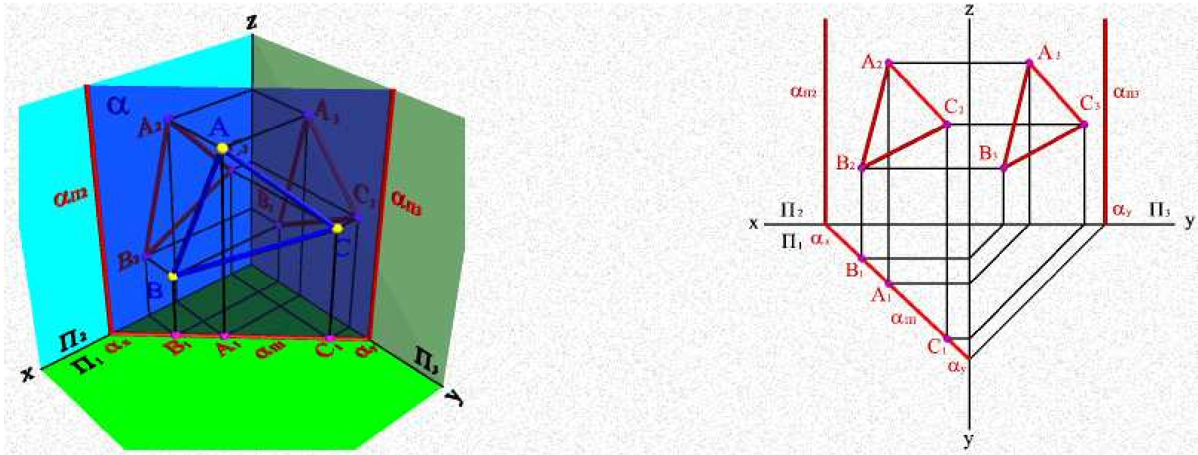


Рис. 3.6 - Горизонтально проектуюча площина

3. Площина перпендикулярна до фронтальної площини проекцій ($\alpha \perp П_2$)- фронтально проектуючи площина.

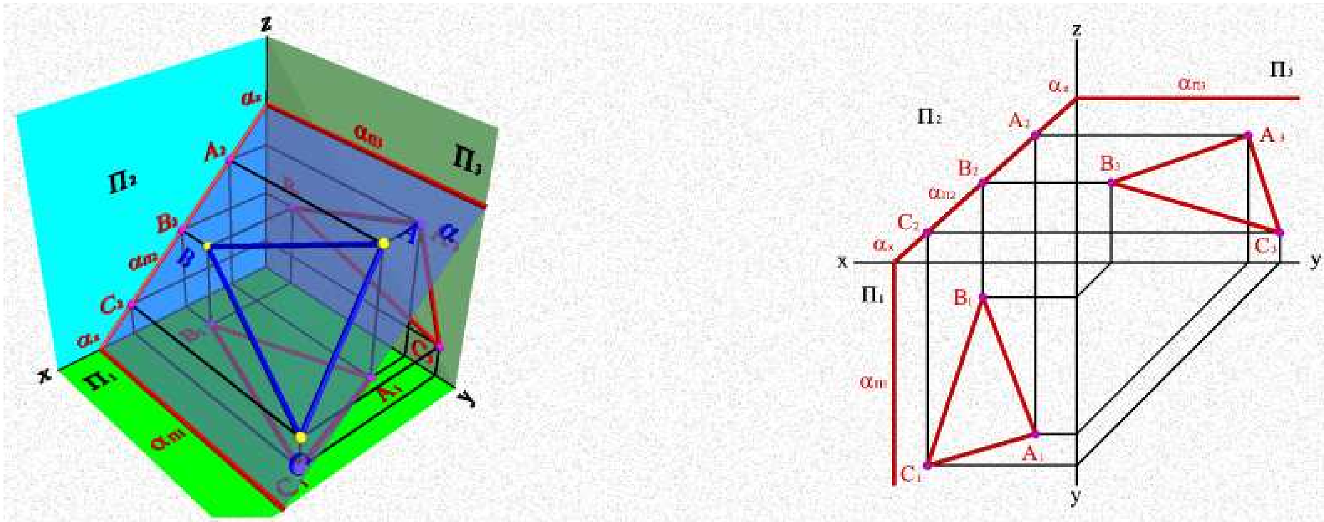


Рис. 3.7 - Фронтально проектуюча площина

Фронтальною проекцією площини α є пряма лінія, що збігається зі слідом $\boldsymbol{\alpha_{п2}}$, (рис.3.7).

4. Площина перпендикулярна до профільної площини ($\alpha \perp П_3$) - профільно проектуюча площина. Окремим випадком такої площини є бісекторна площина (рис.3.8).

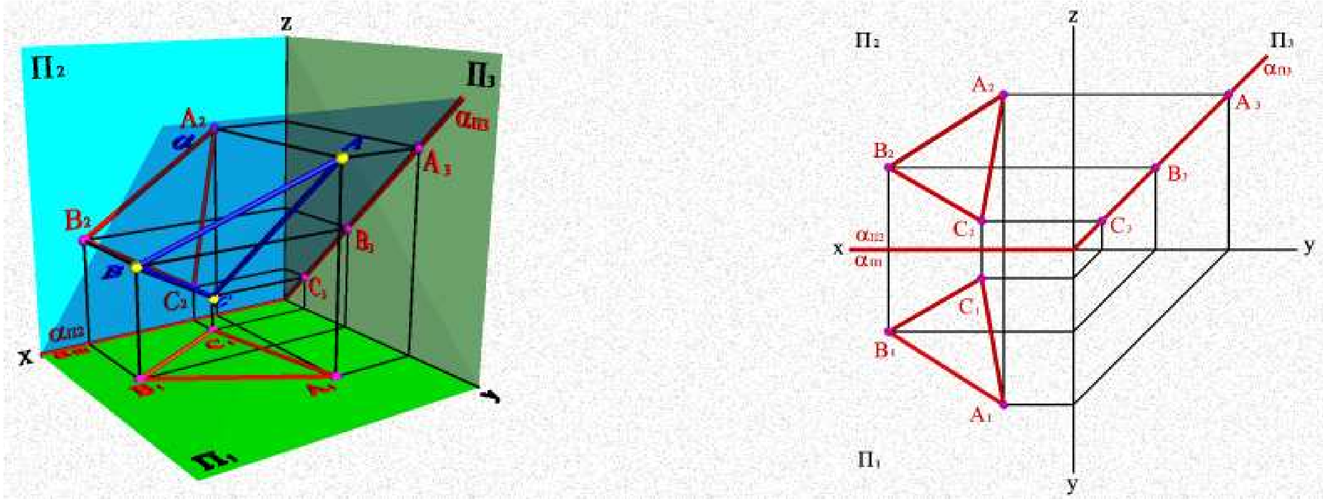


Рис. 3.8 - Бісекторна площина

5. Площина паралельна до горизонтальної площини проекцій (α//$П_1$) - горизонтальна площина ($\alpha \perp П_2, \alpha \perp П_3$).

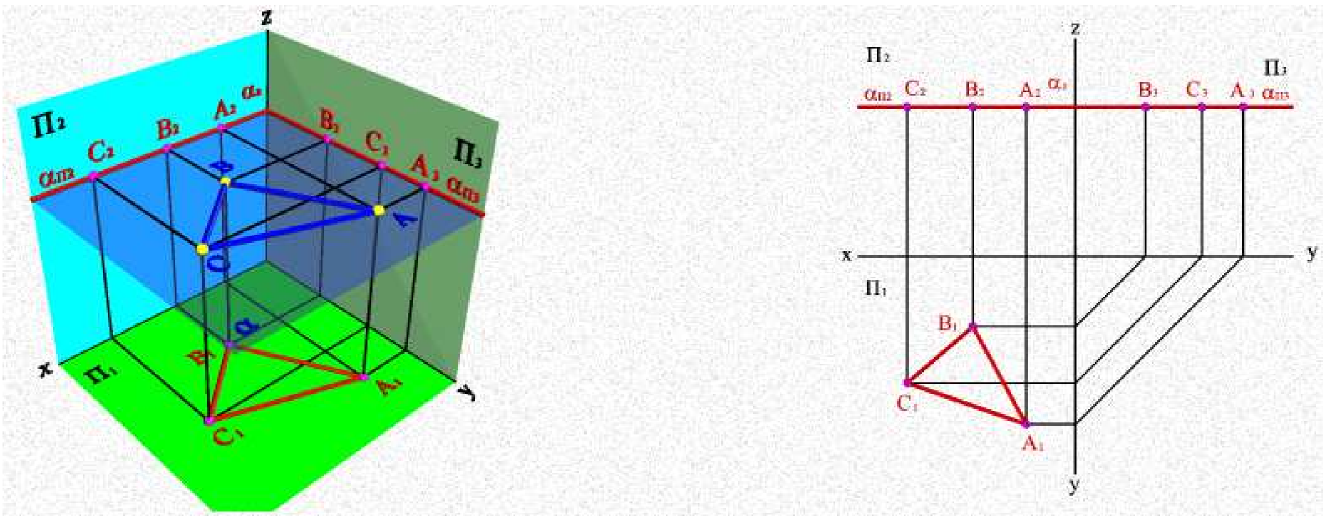


Рис.3.9 - Горизонтальна площина

Будь-яка фігура в цій площині проектується на площину $\mathbf{П_1}$ без спотворень, а на площини $\mathbf{П_2}$ і $\mathbf{П_3}$ у прямі - сліди площини $\boldsymbol{\alpha_{п2}}$ і $\boldsymbol{\alpha_{п3}}$(рис.3.9).

6. Площина паралельна до фронтальної площини проекцій (α//$П_2$) називається фронтальною площиною ($\alpha \perp П_1, \alpha \perp П_3$). Будь-яка фігура в цій площині проектується на площину $\mathbf{П_2}$ без спотворення, а на площини $П_1$ і $П_3$ у прямі – сліди площини $\boldsymbol{\alpha_{m}}$ і $\boldsymbol{\alpha_{п3}}$(рис.3.10).

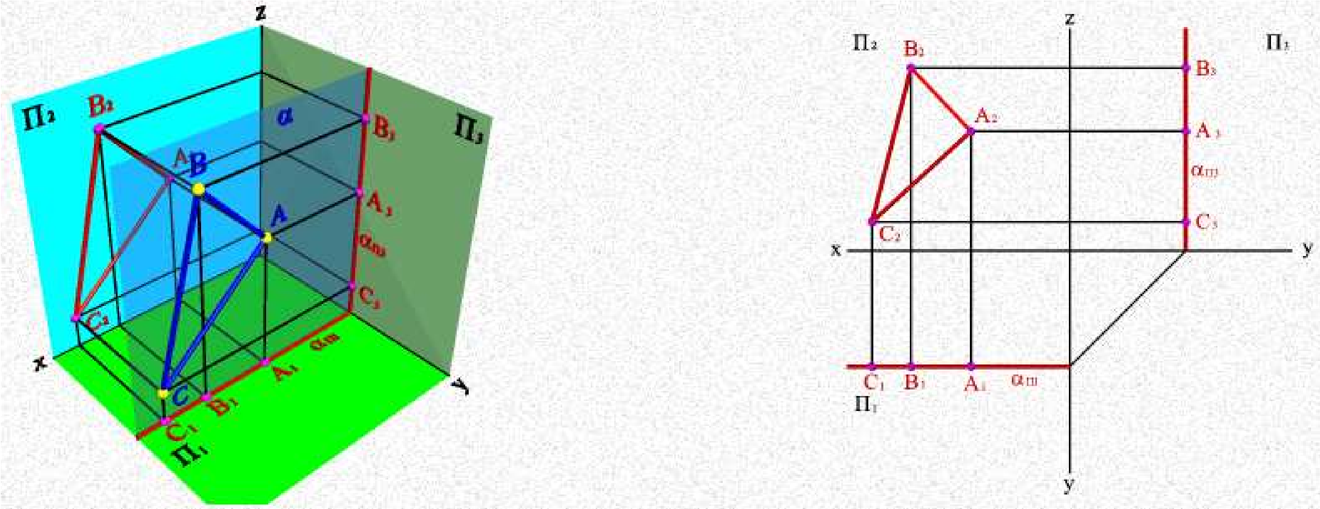


Рис. 3.10 - Фронтальна площина

7. Площина паралельна до профільної площини проекцій (α//$П_3$) називається профільною площиною.

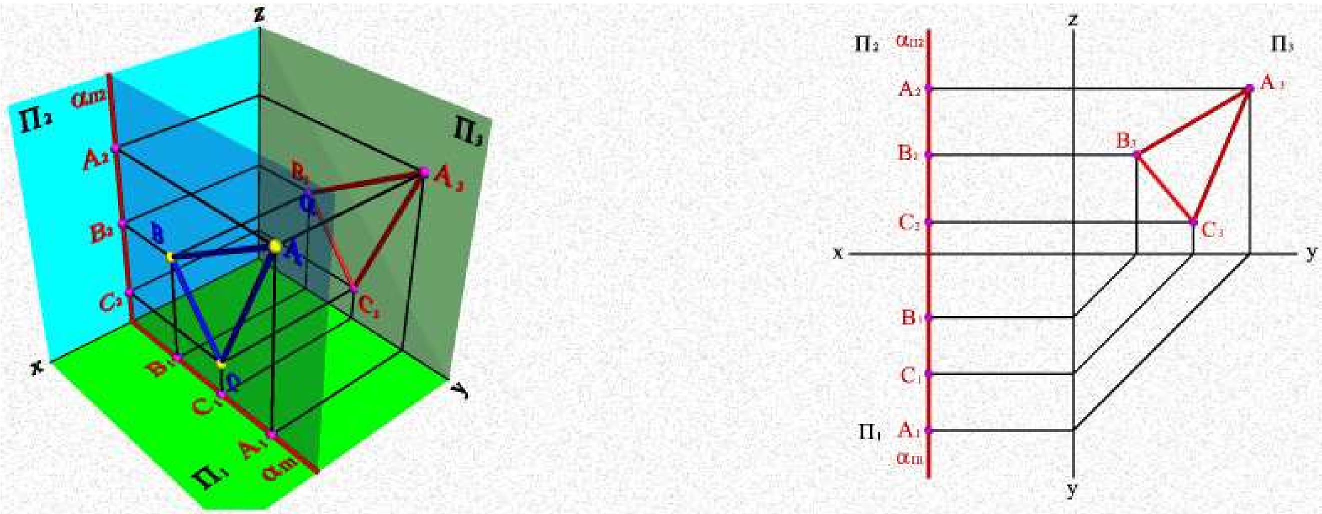


Рис. 3.11 - Профільна площина

Будь-яка фігура в цій площині проектується на площину $\mathbf{П_3}$ без спотворення, а на площини $\mathbf{П_1}$ і $\mathbf{П_2}$ у прямі - сліди площини $\alpha_{П1}$ і $\boldsymbol{\alpha}_{п2}$ (рис.3.11).

Горизонтальну, фронтальну і профільну площини називають ще площинами рівня.

4.4. Сліди площини

Слідом площини називається лінія перетину площини з площинами проекцій.

У залежності від того з якою із площин проекцій перетинається дана, розрізняють: **горизонтальний, фронтальний і профільний сліди площини.**

Кожен слід площини є прямою лінією, для побудови якої необхідно знати дві точки, або одну точку і напрямок прямої(як для побудови будь-якої прямої). На рис. 3.12 показане знаходження слідів площини **α(ABC). Фронтальний слід** площини **$\alpha_{п2}$**, побудований, як пряма з'єднуюча дві точки **$N_{(AC)}$** і **$N_{(AB)}$**, що є фронтальними слідами відповідних прямих, які належать площині **α.**

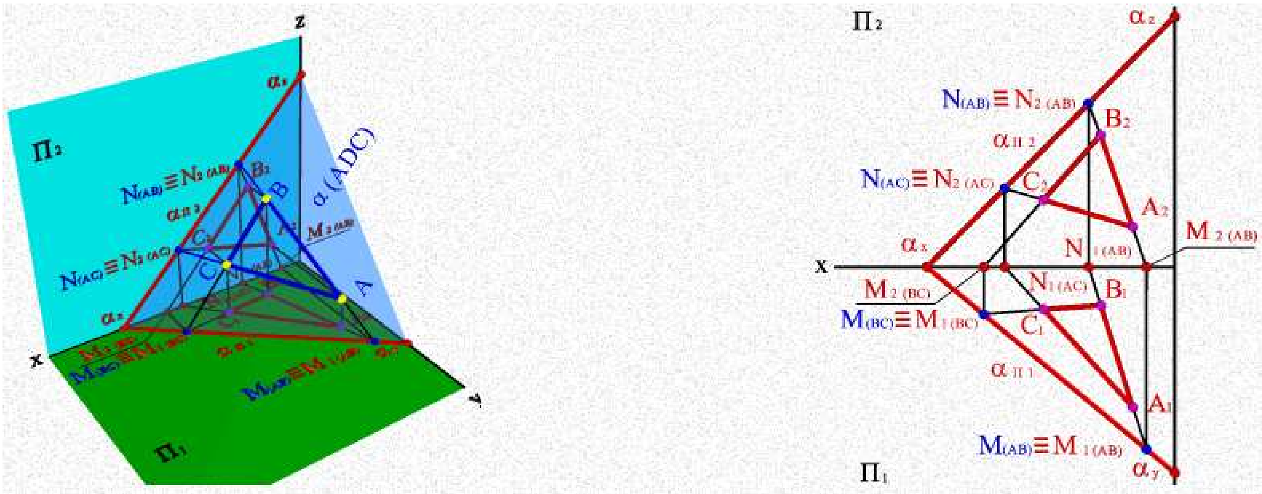


Рис. 3.12 - Побудова слідів площини

Горизонтальний слід $\alpha_{П1}$– пряма, що проходить через горизонтальні сліди прямих **ВС** і **АВ**. **Профільний слід $\alpha_{п3}$**– пряма з'єднуюча точки (α_y і α_z) перетину горизонтального і фронтального слідів з осями.

4.5. Головні лінії в площині

Серед прямих ліній, які можуть бути розташовані в даній площині, особливе місце займають прямі чотирьох напрямків:

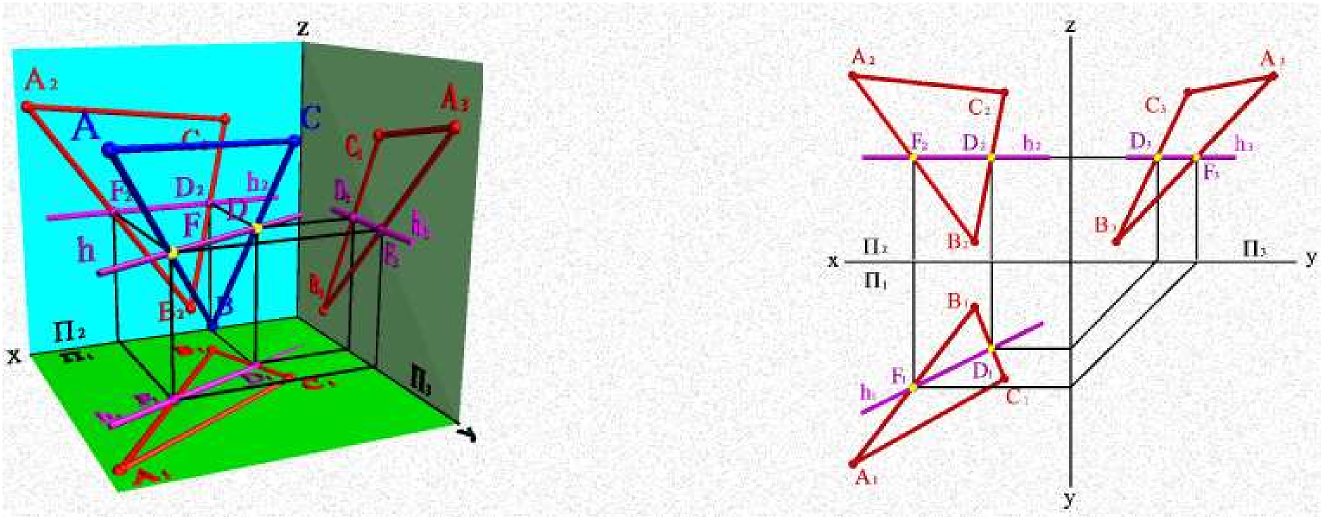


Рис. 3.13 - Горизонталь площини

1. **Горизонталі h -** прямі, що лежать у даній площині і паралельні до горизонтальної площини проекцій ($h \in ABC$, $h // П_1$, $h_2 // Ox$, $h_3 // Oy$) (рис.3.13).

2. **Фронталі f** - прямі, розташовані в площини і паралельні до фронтальної площини проекцій ($f \in ABC$, $f // П_2$, $f_1 // Ox$, $f_3 // Oz$) (рис.3.14).

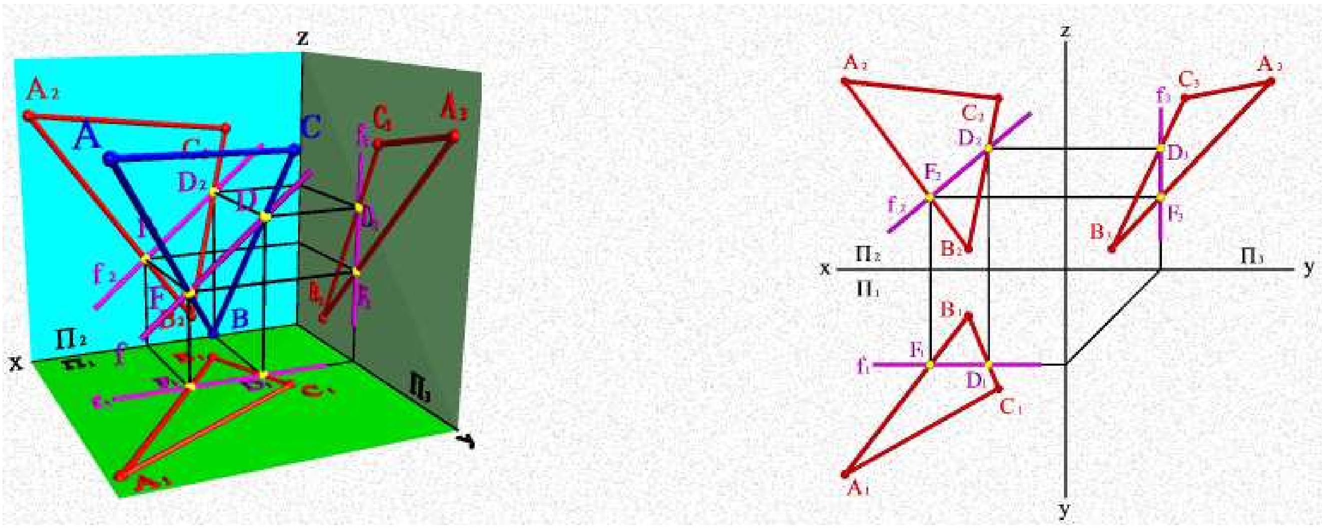


Рис. 3.14 - Фронталь площини

3. Профільні прямі p - прямі, що знаходяться в даній площині і паралельні до профільної площини проекцій ($p \in ABC$, $p // П_3$, $p_1 \perp Ox$, $p_2 \perp Ox$)(рис.3.15).

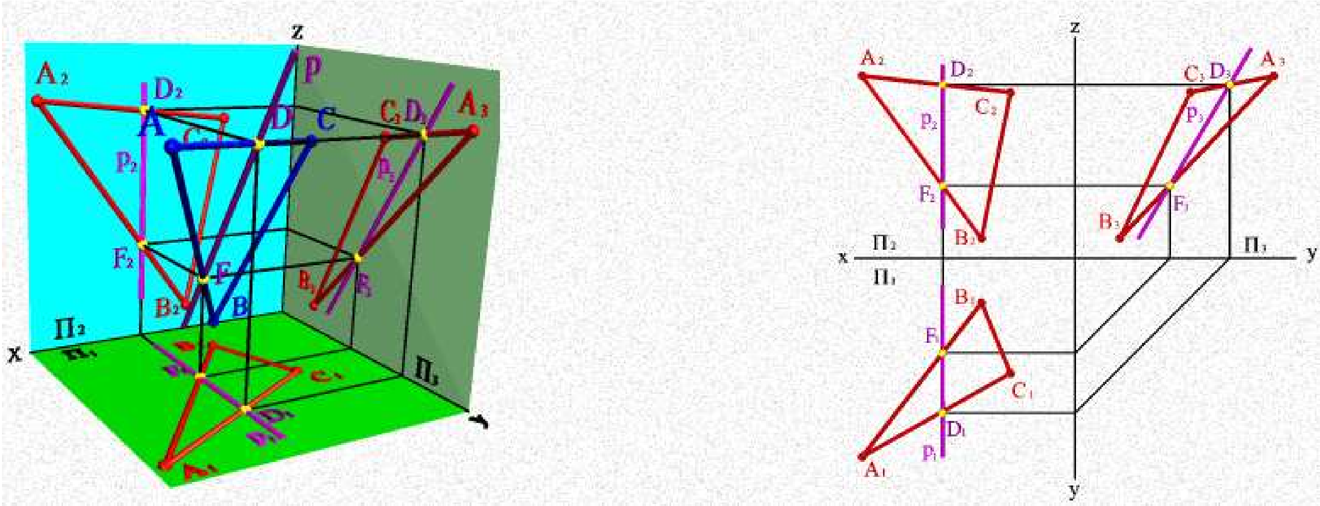


Рис. 3.15 - Профільна пряма площини

Варто помітити, що сліди площини можна віднести теж до головних ліній. Горизонтальний слід - це горизонталь площини, фронтальний - фронталь і профільний - профільна лінія площини.

4. Лінія найбільшого нахилу і її горизонтальна проекція утворюють лінійний кут φ , яким виміряється двогранний кут, складений даною площиною із горизонтальною площиною проекцій.

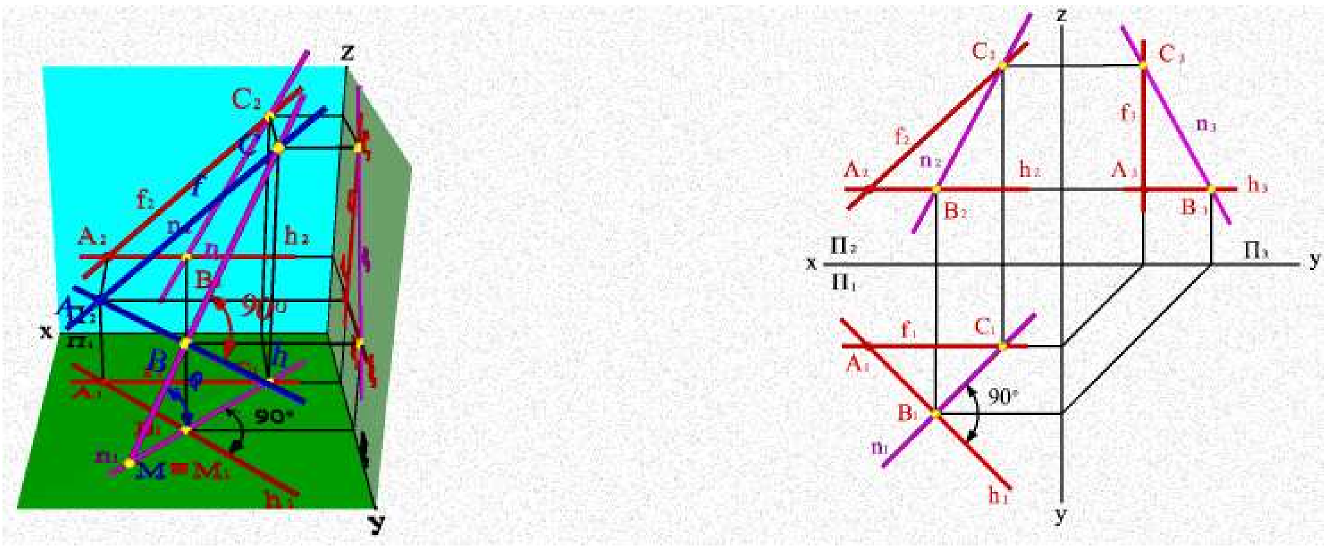


Рис. 3.16 - Лінія найбільшого нахилу площини

3.6. Взаємне розташування прямої і площини

Можливі три випадки відносного розташування прямої і площини:

1. Пряма належить площині;

2. Пряма паралельна площині;

3. Пряма перетинає площину, окремий випадок – пряма перпендикулярна до площини.

3.6.1 Пряма лінія, яка належить до площини

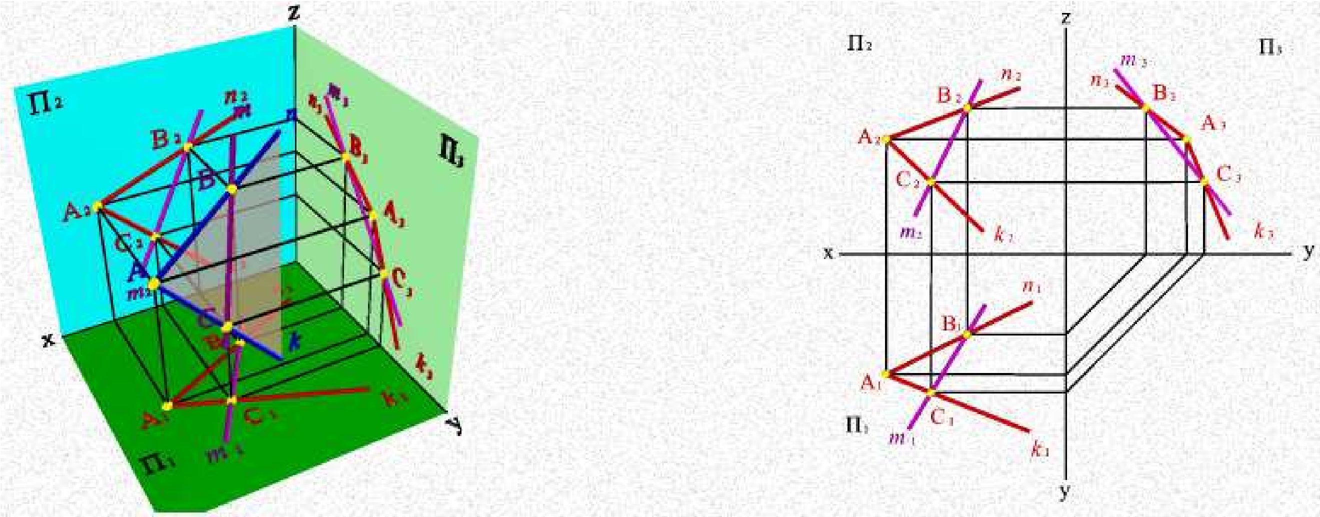


Рис. 3.17 - Пряма і площина мають дві спільні точки

Аксіома 1. Пряма належить площині, якщо дві її точки належать площині (рис. 3.17).

Аксіома 2. Пряма належить площині, якщо має з площиною одну **спільну точку і паралельна якій-небудь прямій розташованій у цій площині, (рис.3.18)**

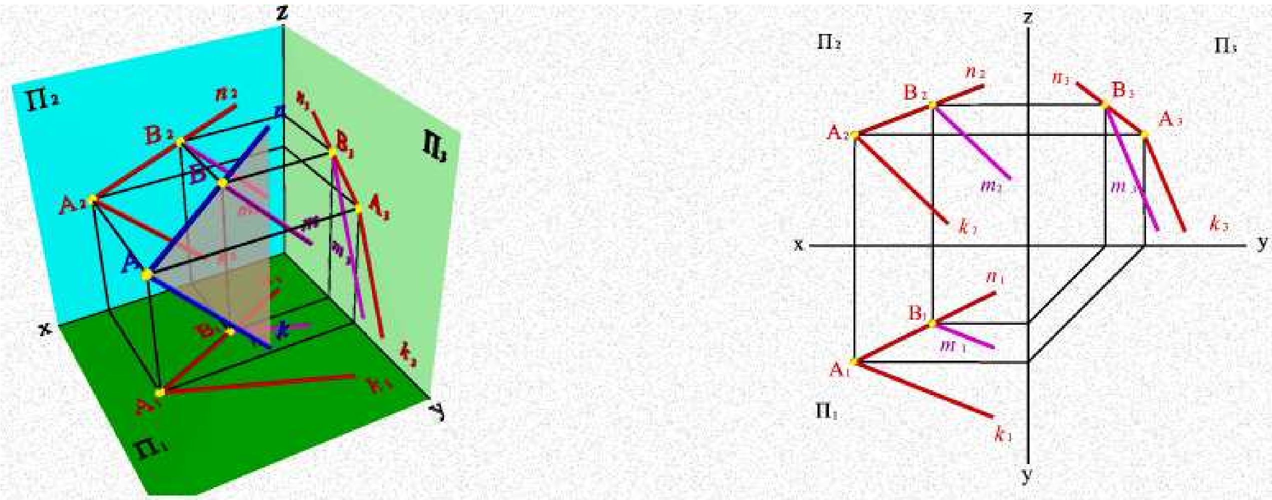


Рис. 3.18 - Пряма має з площиною одну спільну точку та паралельна до прямої у цій площині

Очевидно, що якщо пряма не має двох спільних точок із площиною, то вона або паралельна площині, або перетинає її.

3.6.2. Пряма лінія паралельна до площини

При рішенні питання про паралельність прямої лінії і площини необхідно спиратися на відоме положення стереометрії: пряма паралельна площині, якщо вона паралельна до однієї з прямих, що лежать у цій площині. Оцінимо взаємне положення прямої **а** і площини **АВС,** (рис3.19).

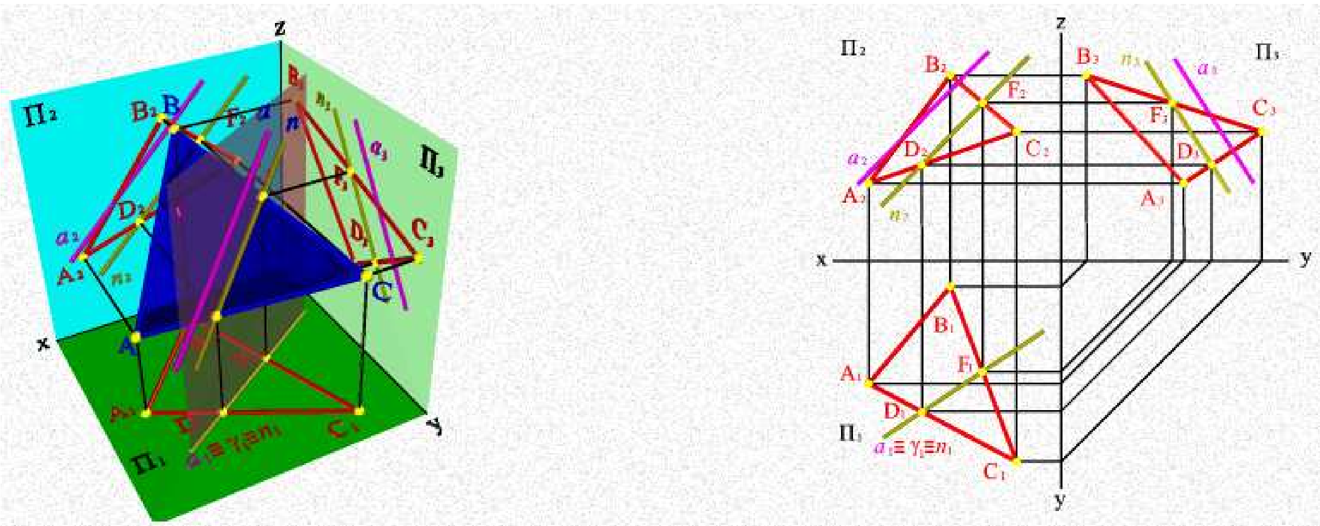


Рис. 3.19 - Пряма паралельна до площини

Для цього через пряму **а** проведемо допоміжну січну площину γ - у даному випадку горизонтально проектуюча площина. Знайдемо лінію перетину площин **γ** і **АВС**- пряму **n** (**DF**). Проекція прямої **n** на горизонтальну площину проекцій збігається з проекцією **a_1** і зі слідом площини **γ**. Проекція прямої **n_2** паралельна **a_2**, **n_3** паралельна **a_3**, отже, пряма **а** паралельна площині **АВС**.

3.6.3. Пряма лінія, яка перетинає площину

Знаходження точки перетину прямої лінії і площини – основна задача нарисної геометрії. Можна сформулювати алгоритм рішення задачі в такий спосіб, (рис.3.20):

Алгоритм:

1. Побудова допоміжної січної площини γ (горизонтально проектуюча площина), що проходить через пряму **a** (**a**$\in\gamma$);

2. Побудова лінії перетину допоміжної площини γ і заданої площини α (**n**=$\alpha\cap\gamma$);

3. Визначення шуканої точки **К**, як точки перетину двох прямих, заданої - **a** і отриманої в результаті перетину площин – **n**

(**К**=**a** $\cap$**n**). Як допоміжну площину γ рекомендується брати одну з проектуючих площин.

4. Визначення видимості прямої **a** відносно площини α.

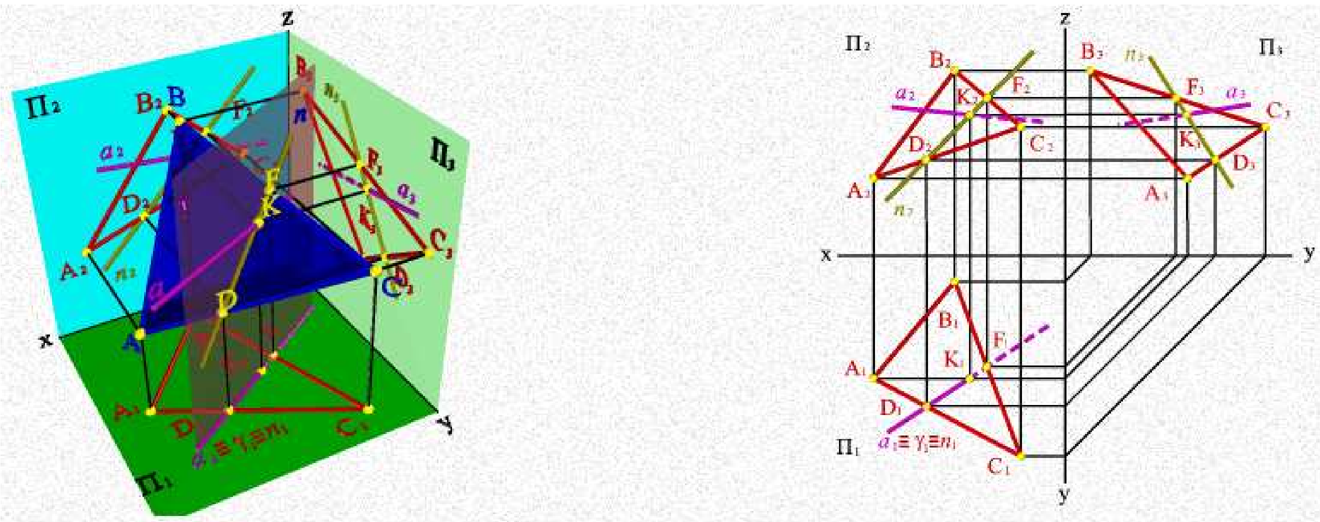


Рис. 3.20 - Побудова точки перетину прямої і площини

Пряма лінія перпендикулярна до площини

Доведемо наступну теорему про перпендикуляр до площини: Якщо пряма перпендикулярна до площини, то горизонтальна проекція цієї прямої перпендикулярна до горизонтальної проекції горизонталі площини, а фронтальна проекція – до фронтальної проекції фронталі площини.

Нехай пряма **n**, перпендикулярна до площини, перетинає площину **BCD** у точці **N**. Тоді за умовою **n** перпендикулярна і до **h**-горизонталі проведеної в площині **BCD**, а на підставі теореми про проектування прямого кута можна стверджувати, що на горизонтальну площину проекцій вони проектуються під прямим кутом, тобто $\mathbf{n_1} \perp \mathbf{h_1}$. Аналогічно для фронталі – $\mathbf{f} \perp \mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{f_2} \perp \mathbf{n_2}$.

Справедлива і зворотна теорема: Якщо проекції прямої перпендикулярні однойменним проекціям відповідних головних ліній площини (горизонталі і фронталі), то така пряма перпендикулярна до площини. Доказ випливає з теореми про проектування прямого кута.

Виходячи з розглянутих теорем, можна розв’язати задачу про побудову перпендикуляра до площини з точки **A** (рис.3.21) .

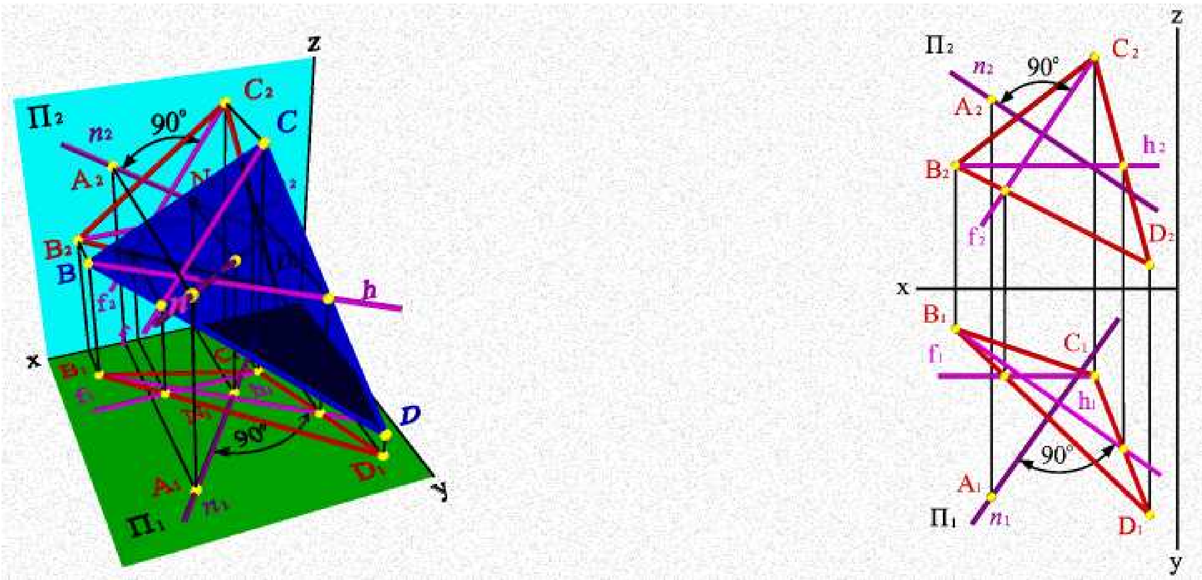


Рис.3.21 - Побудова прямої перпендикулярної до площини

3.7. Взаємне розташування точки і площини

Можливі два варіанти взаємного розташування точки і площини: або точка належить площині, або ні. Якщо точка належить площині то з трьох проекцій, що визначають положення точки в просторі, довільно задати можна тільки одну.

Розглянемо приклад (рис.3.22) : Побудова проекцій точки **A**, яка належить площині загального положення заданої двома паралельними прямими α(**a**//**b**).

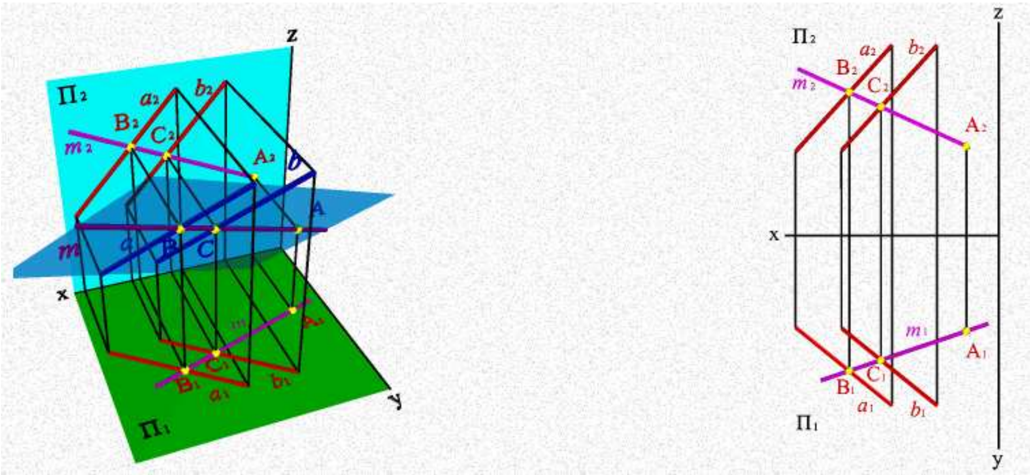


Рис.3.22 - Точка, яка належить площині

Через точку $\mathbf{A_2}$ проведемо проекцію прямої $\mathbf{m_2}$, що перетинає проекції прямих $\mathbf{a_2}$ і $\mathbf{b_2}$ у точках $\mathbf{C_2}$ і $\mathbf{B_2}$ ($C\in\alpha, B\in\alpha \Rightarrow m\in\alpha$). Побудувавши проекції точок $\mathbf{C_1}$ і $\mathbf{B_1}$, що визначають положення $\mathbf{m_1}$, знаходимо горизонтальну проекцію точки **A** ($A_1\in m_1$, $m\in\alpha \Rightarrow A\in\alpha$).

3.8. Взаємне розташування площин

Дві площини в просторі можуть бути або взаємно паралельні, в окремому випадку збігаючись одна з одною, або перетинатися.

3.8.1.Паралельні площини.

Площини паралельні, якщо дві прямі, які перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим, які перетинаються, іншої площини.

Це визначення гарно ілюструється задачею, через точку **B** провести площину паралельну площині, заданої двома прямими, які перетинаються, $\mathbf{a\cap b=A}$, (рис.3.23).

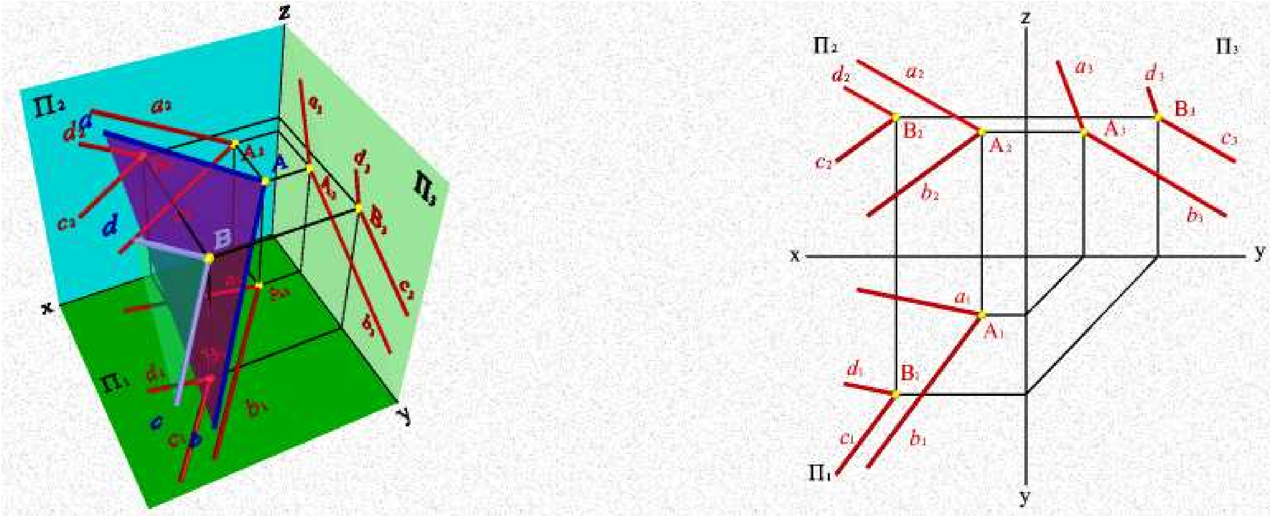


Рис.3.23 - Паралельні площини

3.8.2.Площини, що перетинаються, окремий випадок – взаємно перпендикулярні площини.

Лінія перетину двох площин є пряма, для побудови якої досить визначити дві її точки, спільні обом площинам, або одну точку і напрямок лінії перетину площин.

Розглянемо побудову лінії перетину двох площин, коли одна з них є проектуючою, (рис.3.24). Нехай площина загального положення задана трикутником **ABC**, а друга площина - горизонтально проектуюча **α.**

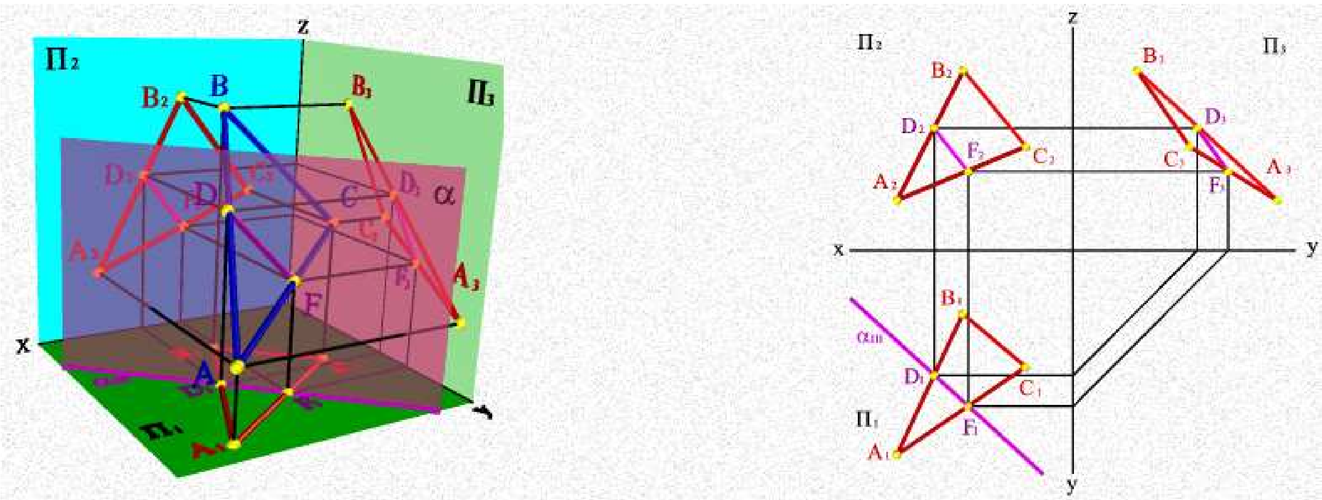


Рис. 3.24 - Перетин площини загального положення з горизонтально проектуючою площиною

Рішення задачі полягає в знаходженні двох точок, спільних для даних площин, через які можна провести пряму лінію. Площину, задану трикутником

ABC можна представити, як прямі лінії (**AB**), (**AC**), (**BC**). Точка перетину прямої (**AB**) із площиною α - точка **D**, прямої (**AC**) -**F**. Відрізок [**DF**] визначає лінію перетину площин.

Перейдемо до загального випадку. Нехай у просторі задані дві площини загального положення $\alpha(\mathbf{m}\|\mathbf{n})$ і β (**ABC**),(рис.3.25)

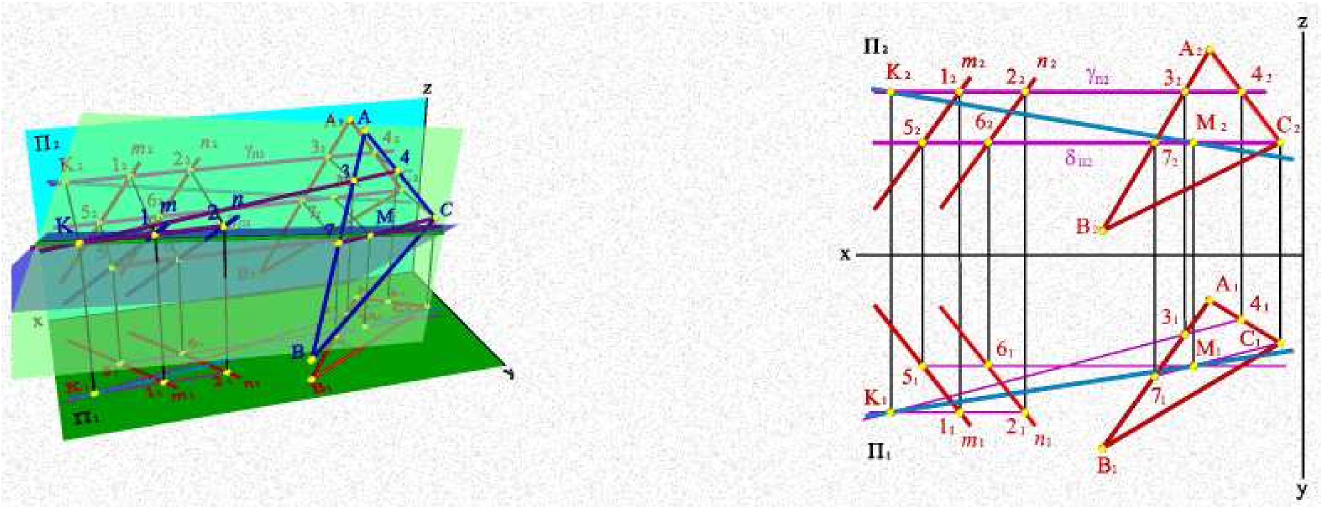


Рис.3.25 - Перетин площин загального положення

Розглянемо на епюрі побудову лінії перетину площин $\alpha(\mathbf{m}\|\mathbf{n})$ і β (**ABC**). За аналогією з попередньою задачею для побудови лінії перетину даних площин проведемо допоміжні січні площини γ і δ. Знайдемо лінії перетину цих площин з розглянутими площинами. Площина γ перетинає площину α по прямій (**12**), а площина β - по прямій (**34**). Точка **К** - точка перетину цих прямих, одночасно належить трьом площинам α, β і γ, будучи в такий спосіб точкою, яка належить лінії перетину площин α і β. Площина δ перетинає площини α і βпо прямих (**56**) і (**7С**) відповідно, точка їх перетину **М** розташована одночасно в трьох площинах α, β, δ і належить прямій лінії перетину площин α і β. У такий спосіб знайдені дві точки, які належать лінії перетину площин α і β- пряма (**КМ**).

Деякого спрощення при побудові лінії перетину площин можна досягти, якщо допоміжні січні площини проводити через прямі, які задають площину.

Взаємно перпендикулярні площини. Зі стереометрії відомо, що дві площини взаємно перпендикулярні, якщо одна з них проходить через перпендикуляр до іншої.

Через точку **A** можна провести безліч площин перпендикулярних даній площині $\alpha(\mathbf{f}\cap\mathbf{h})$. Ці площини утворять у просторі пучок площин, віссю якого є перпендикуляр опущений із точки **A** на площину α . На епюрі це буде виглядати в такий спосіб (рис.3.26.б).**n** - перпендикуляр,

проведений із точки **A** до площини $\alpha(\mathbf{f}\cap\mathbf{h})$; **m** - довільна пряма проведена через точку **A**.

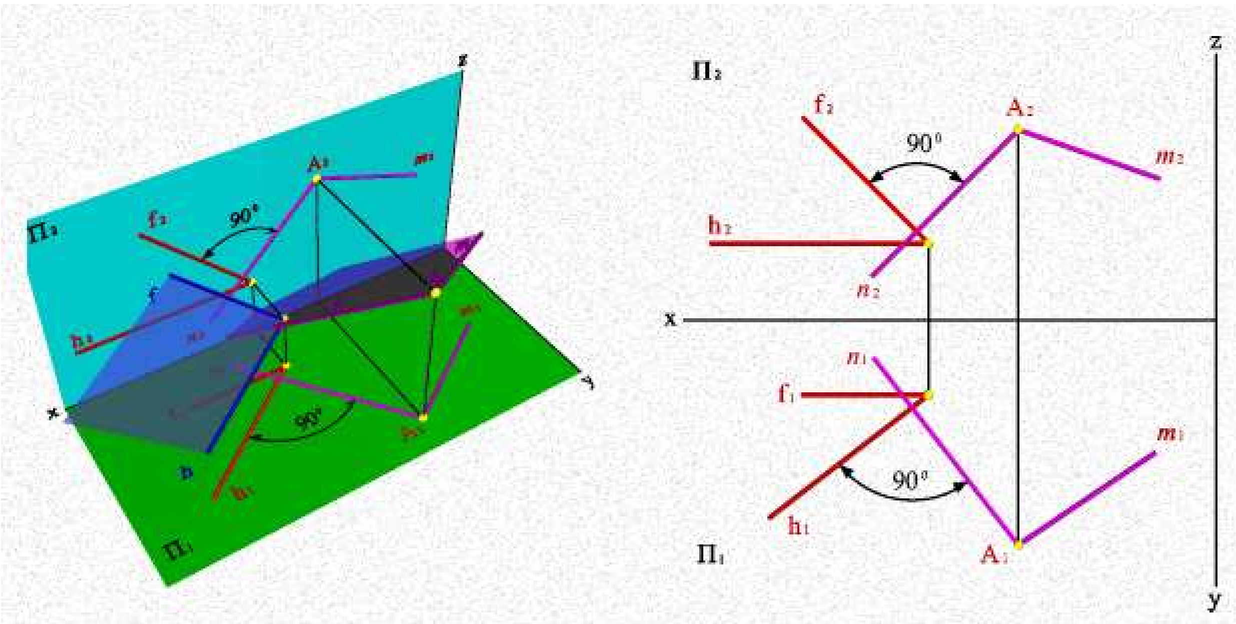


Рис. 3.26 - Взаємно перпендикулярні площини

Запитання для самоперевірки:

1. Які можливі способи завдання площини на комплексному кресленні ?
2. Чи можна через пряму паралельну до осі OX, провести площину загального положення ?
3. У якій площині горизонталі є дночасно і фронталями ?
4. Які площини можна провести через пряму горизонтальна проекція якої вироджується в точку?
5. За допомогою якої прямої визначають кут нахилу площини до Π_1 ?
6. Яка лінія носить назву – лінія найбільшого ухилу ?
7. Яка ознака того, що пряма належить площині ?
8. Як виглядає на кресленні пряма, що перпендикулярна до площини ?
9. Коли вважають , що дві площини паралельні ?
10. Як визначити точку перетину прямої та площини (алгоритм) ?

Лекція №4

4.1. Позиційні та метричні задачі

4.2. Методи перетворення ортогональних проекцій

4.3. Метод заміни площин проекцій

4.4. Метод плоскопаралельного переміщення

4.5. Метод обертання навколо осі перпендикулярної до площини проекцій

4.6. Метод обертання навколо осі паралельної до площини проекцій (обертання навколо лінії рівня)

4.1.Позиційні та метричні задачі

Рішення багатьох задач способами нарисної геометрії, у кінцевому рахунку, зводиться до визначення **позиційних** і **метричних** характеристик геометричних об'єктів. У зв'язку з цим усе різноманіття задач може бути віднесене до двох груп:

1.**Задачі позиційні** – рішення, яких повинно давати відповідь на питання про **взаємне розташування геометричних об'єктів** (в окремому випадку, з'ясувати їхню взаємну належність) як по відношенню один до одного, так і щодо системи координатних площин проекцій.

2.**Задачі метричні** – при рішенні задач цієї групи з'являється можливість відповісти на питання, що стосуються як внутрішньої метрики заданих геометричних об'єктів (визначення відстані між різними точками об'єкта і визначення кутів між лініями і поверхнями, що належать цьому об'єкту), так і визначення відстаней між точками і величин кутів між лініями і поверхнями, що належать різним об'єктам.

Розглянемо на прикладі: Визначити відстань від точки **A** до прямої **m**. Відстань від точки до прямої - це натуральна величина перпендикуляра проведеного з точки до прямої лінії. Найпростішою умовою такої задачі є випадок, коли пряма є **проектуючою**. Визначимо відстань від точки **А** до прямої **m**, коли пряма є горизонтально проектуючою лінією (рис.4.1), тобто **$m \perp \Pi_1$, $m \parallel \Pi_2$, $m \parallel \Pi_3$**.

Згідно, **теоремі про проектування прямого кута**, перпендикуляр із проекцій точки ***A*** можна проводити до фронтальної і профільної проекції прямої **m**, при цьому отриманий відрізок **АК**- горизонталь, тобто паралельний до горизонтальної площини проекцій і на цю площину проектується в натуральну величину.

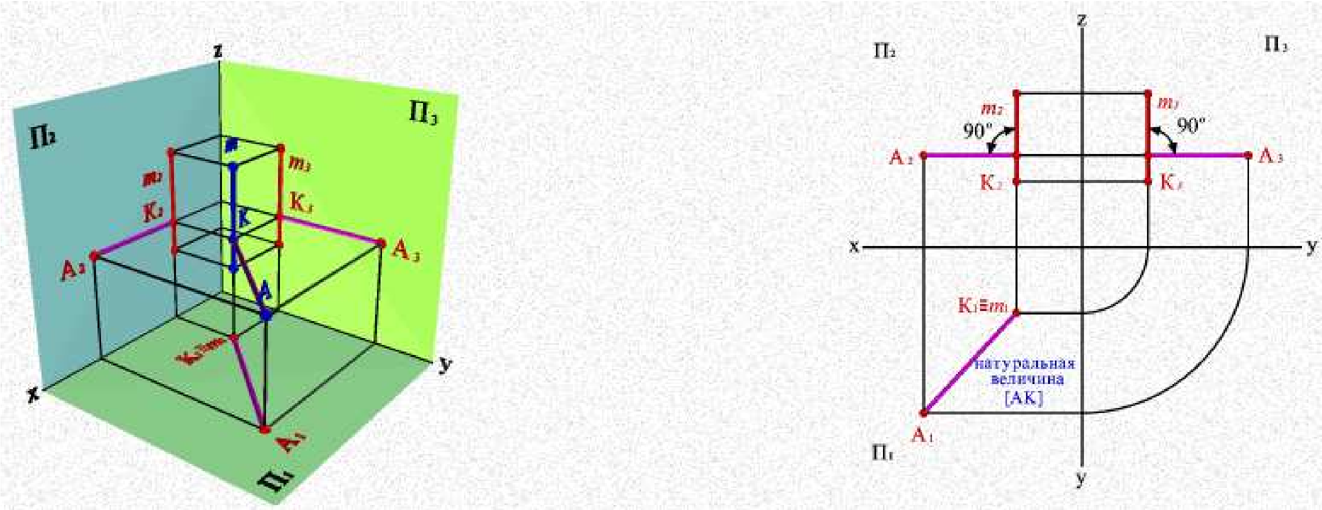


Рис.4.1 - Відстань від точки до горизонтально проектуючої прямої

Якщо пряма паралельна до однієї з площин проекцій, тобто є **прямою рівня**, то без перетворення ортогональних проекцій можна тільки знайти проекції перпендикуляра.

Нехай пряма **f** фронталь, тобто **$f \parallel \Pi_2$**, значить перпендикуляр можна проводити з проекції ***A_2*** до фронтальної проекції прямої **m_2**, на цю площину кут буде проектуватися без спотворення (рис.4.2). Однак отримані проекції відрізка **АК** не визначають дійсної величини відрізка тому, що **АК** - відрізок прямої загального положення. Дійсну величину АК находимо методом прямокутного трикутника.

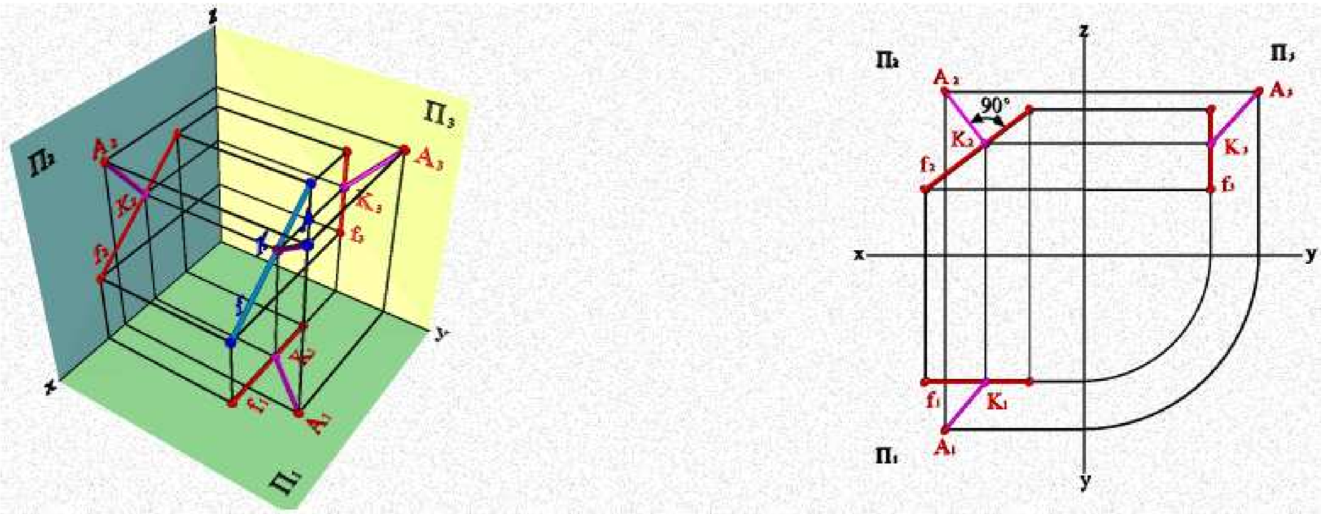


Рис.4.2 - Відстань від точки до фронтальної прямої

В загальному випадку подібної задачі, коли потрібно знайти відстань від точки до прямої загального положення, то навіть побудова проекції шуканого відрізка без перетворення проекцій не являється можливою.

Зіставлення приведених креслень показує, що труднощі рішення однієї і тієї ж задачі істотно залежать від положення геометричних об’єктів щодо площин проекцій.

4.2.Методи перетворення ортогональних проекцій

У нарисній геометрії задачі розв’язуються графічно. Кількість і характер геометричних побудов при цьому визначається не тільки складністю задачі, але й у значній мірі залежить від того, з якими проекціями (зручними чи незручними) приходиться мати справу. При цьому найбільш вигідним, **окремим,** положенням геометричного об’єкта варто вважати:

Положення, **перпендикулярне** до площини проекцій (для рішення позиційних, а в ряді випадків, і метричних задач);

- Положення, **паралельне** стосовно площини проекцій (при рішенні метричних задач).

При рішенні метричних задач, зв’язаних з визначенням дійсних розмірів зображених на епюрі фігур, можуть зустрітися значні труднощі, якщо задані проекції не піддати спеціальним перетворенням.

У зв'язку з цим, природно, виникає питання, яким шляхом можна одержати **зручні** проекції для рішення поставленої задачі по заданих **незручних** ортогональних проекціях.

Перехід від загального положення геометричної фігури до окремого можна здійснювати за рахунок зміни взаємного положення самої фігури і площин проекцій.

При ортогональному проектуванні це досягається двома шляхами:

1. Переміщенням площин проекцій у нове положення по відношенню, до геометричної фігури (яка не змінює положення в просторі), яка виявиться при цьому в окремому положенні відносно нової системи площин проекцій - **метод заміни площин проекцій.**
2. Переміщення в просторі геометричної фігури так, щоб вона зайняла **окреме** положення відносно площин проекцій, які при цьому не змінюють свого положення в просторі - **метод плоскопаралельного переміщення.**

4.3. Метод заміни площин проекцій

Зміна взаємного положення геометричної фігури і площин проекцій методом зміни площин проекцій, досягається шляхом заміни площин $\mathbf{\Pi_1}$ і $\mathbf{\Pi_2}$ новими площинами $\mathbf{\Pi_4}$ (рис.4.3).

Нові площини вибираються перпендикулярно старим. Деякі перетворення проекцій вимагають **подвійної** заміни площин проекцій (рис.4.4).

Послідовний перехід від однієї системи площин проекцій до іншої необхідно здійснювати, виконуючи наступне правило:

відстань від нової проекції точки до нової осі повинна дорівнювати відстані від замінюваної проекції точки до замінюваної осі.

Задача 1: Визначити натуральну величину відрізка **АВ** прямої загального положень (рис..4.3).

Виберемо нову площину проекцій **П$_4$**, паралельно відрізку **АВ** і перпендикулярно до площини **П$_1$**. З уведенням нової площини, переходимо із системи площин **П$_1$⊥П$_2$** в систему **П$_1$⊥П$_4$** , причому в новій системі площин проекція відрізка **А$_4$ В$_4$** буде натуральною величиною відрізка **АВ**.

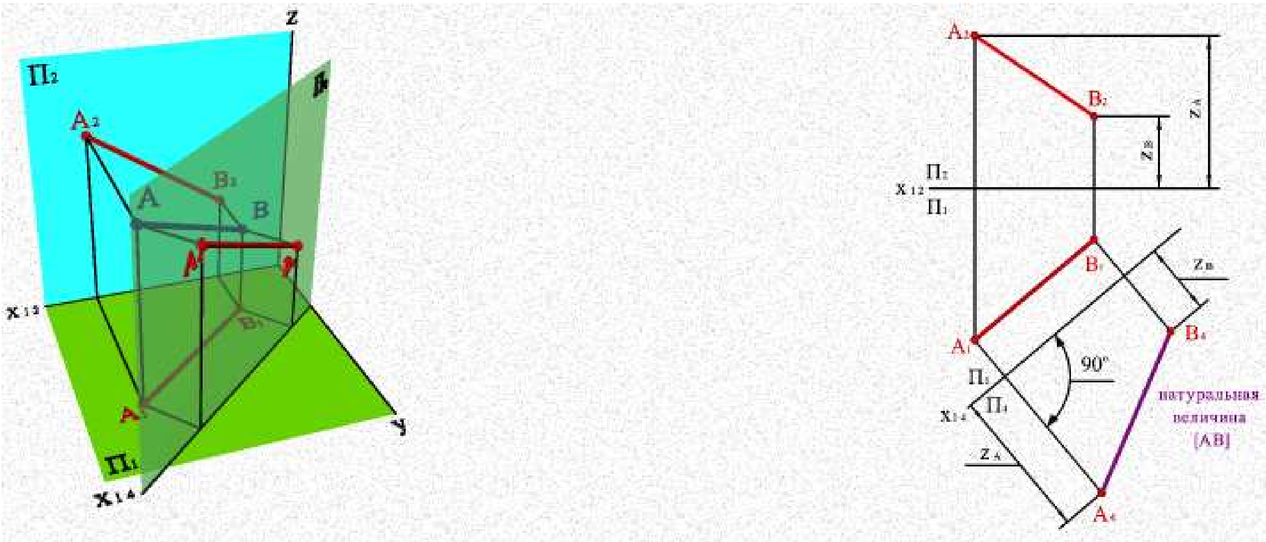


Рис.4.3 - Визначення натуральної величини відрізка прямої методом заміни площин проекцій

Задача 2: Визначити відстань від точки **А** до прямої загального положення, заданої відрізком **ВС** (рис.4.4).

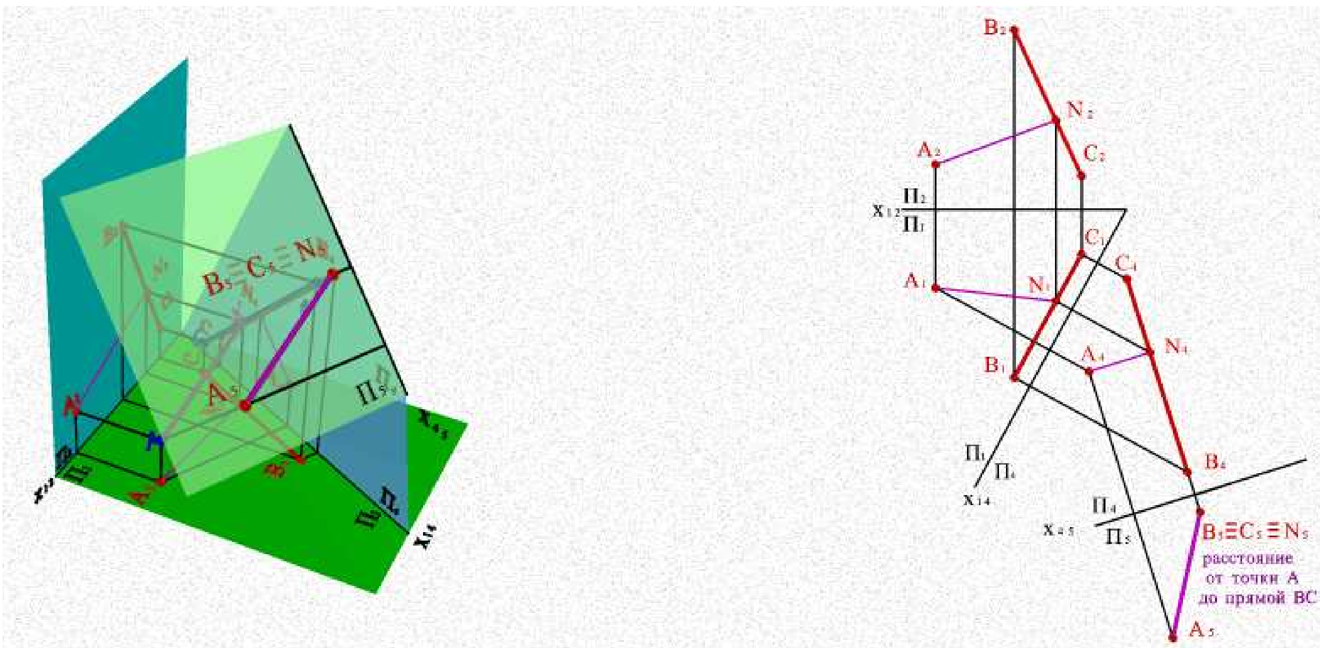


Рис. 4.4 - Визначення відстані від точки до прямої.

4.4. Метод плоскопаралельного переміщення

Зміна взаємного положення геометричного об'єкта і площин проекцій методом плоскопаралельного переміщення здійснюється шляхом зміни положення геометричного об'єкта так, щоб траєкторія руху його точок знаходилась в паралельних площинах. Площини носії траєкторій переміщення точок паралельні до якої-небудь площини проекцій (рис.4.5).

Траєкторія **довільна** лінія. При паралельному переносі геометричного об'єкта щодо площин проекцій, проекція фігури хоча і змінює своє положення, але залишається конгруентною проекції фігури в її вихідному положенні.

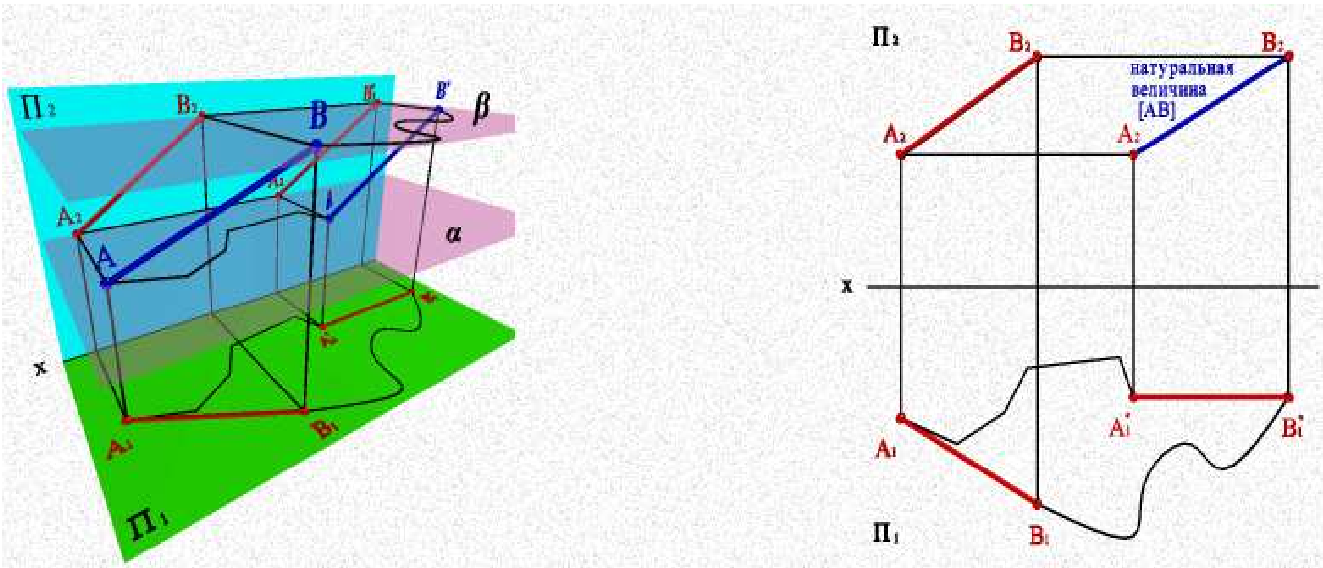


Рис.4.5 - Визначення натуральної величини відрізка способом плоскопаралельного переміщення

Властивості плоскопаралельного переміщення:

1. При всякім переміщенні точок у площині паралельній до площини $П_1$, її фронтальна проекція переміщається по прямої лінії, паралельній до осі X.
2. У випадку довільного переміщення точки в площині паралельній до $П_2$, її горизонтальна проекція переміщається по прямій паралельній до осі X.

У залежності від положення цих площин стосовно площин проекцій і виду кривої лінії - яка визначає траєкторію переміщення точок, метод плоскопаралельного проектування має наступні окремі випадки:

1. Метод обертання навколо осі, перпендикулярної площини проекцій;
2. Метод обертання навколо осі, паралельної до площини проекцій;

4.5. Метод обертання навколо осі перпендикулярної до площини проекцій

Площини носії траєкторій переміщення точок паралельні до площини проекцій. **Траєкторія** - дуга окружності, **центр** якої знаходиться на осі перпендикулярної до площини проекцій.

Для визначення натуральної величини відрізка прямої загального положення **AB** (рис.4.6), виберемо вісь обертання перпендикулярну до горизонтальної площини проекцій і яка проходить через $\mathbf{Y_1}$.

Повернемо відрізок так, щоб він став паралельним до фронтальної площини проекцій (горизонтальна проекція відрізка паралельна осі **X**). При цьому точка $\mathbf{A_1}$ переміститися в $\mathbf{A^*_1}$, а точка **B** не змінить свого положення.

Положення точки $\mathbf{A^*_2}$ знаходиться на перетині фронтальної проекції траєкторії переміщення точки **A** (пряма лінія паралельна осі **X**) і лінії проекційного зв’язку проведеної з $\mathbf{A^*_1}$. Отримана проекція $\mathbf{B_2}$ $\mathbf{A^*_2}$ визначає дійсні розміри самого відрізка.

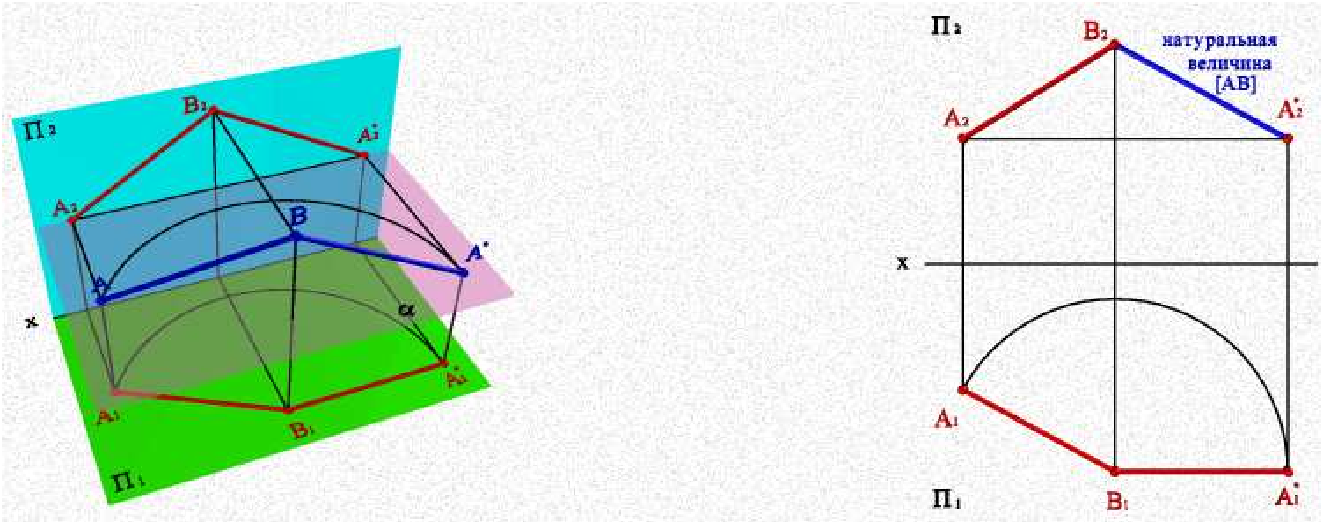


Рис.4.6 - Визначення натуральної величини відрізка методом обертання навколо осі перпендикулярної до горизонтальної площини проекцій

4.6. Метод обертання навколо осі паралельної до площини проекцій

Розглянемо цей спосіб на прикладі визначення кута між прямими, які перетинаються (рис.4.7). Розглянемо дві проекції цих прямих **a** й **b,** які перетинаються в точці **К**.

Для того щоб визначити натуральну величину кута між цими прямими необхідно зробити перетворення ортогональних проекцій так, щоб прямі стали паралельні площині проекцій.

Скористаємося **способом обертання навколо лінії рівня - горизонталі**. Проведемо довільно фронтальну проекцію горизонталі $\mathbf{h_2}$ паралельно осі **OX**, що перетинає прямі в точках $\mathbf{A_2}$ і $\mathbf{B_2}$. Визначивши проекції $\mathbf{A_1}$ і $\mathbf{B_1}$, побудуємо горизонтальну проекцію горизонталі $\mathbf{h_1}$. Траєкторія руху всіх точок при обертанні навколо горизонталі - коло, яке проектується на площину $\mathbf{П_1}$ у виді прямої лінії перпендикулярної до горизонтальної проекції горизонталі.

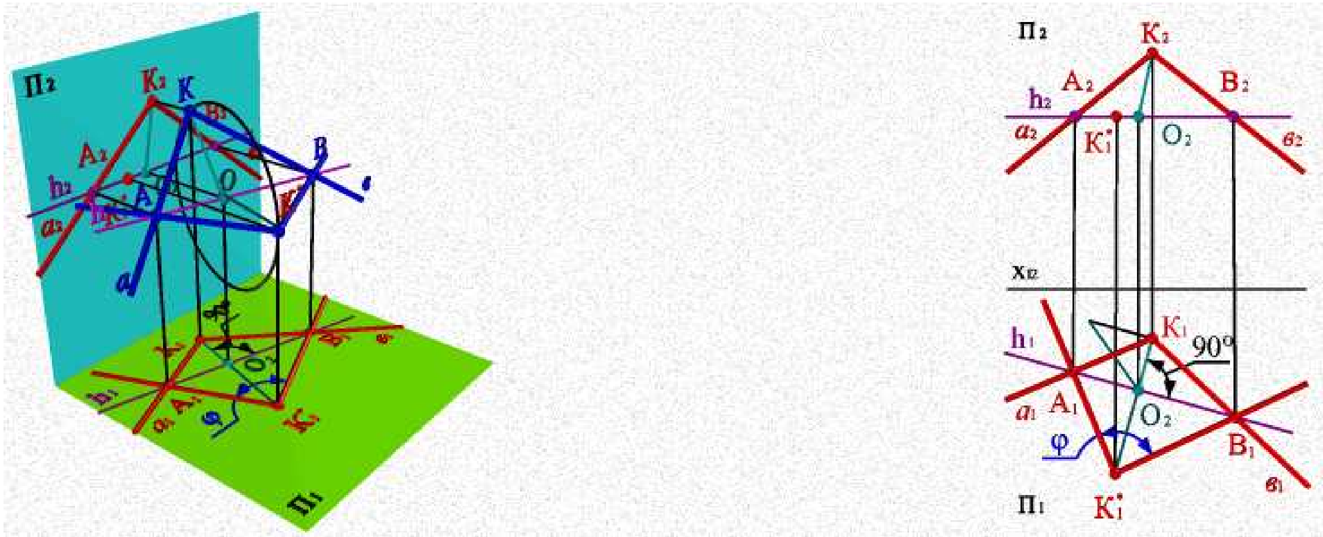


Рис.4.7 - Визначення кута між прямими, які перетинаються способом обертання навколо осі паралельної до горизонтальної площини проекцій

Таким чином, траєкторія руху точки $\mathbf{K_1}$ визначена прямою $\mathbf{K_1O_1}$, точка **O** центр кола - траєкторії руху точки **K**. Щоб знайти радіус цього кола, знайдемо методом прямокутного трикутника натуральну величину відрізка **KO.**

Продовжимо пряму $\mathbf{K_1O_1}$ так щоб $|\mathbf{KO}|=|\mathbf{O_1K^*_1}|$. Точка $\mathbf{K^*_1}$ відповідає точці **K** , коли прямі **a** і **b** лежать у площині паралельній до $\mathbf{П_1}$ і проведеної через горизонталь - вісь обертання.

З урахуванням цього через точку $\mathbf{K^*_1}$ і точки $\mathbf{A_1}$ і $\mathbf{B_1}$ проведемо прямі, що лежать тепер у площині паралельній до $\mathbf{П_1}$, а отже і кут $\boldsymbol{\varphi}$ - натуральна величина кута між прямими **a** і **b** .

Запитання для самоперевірки:

1. Які існують основні способи перетворення комплексного креслення ?
2. Заміну якої площини проекцій потрібно зробити, щоб визначити кут нахилу прямої загального положення до $П_1$?
3. Заміну якої площини проекцій потрібно зробити, щоб визначити кут нахилу прямої загального положення до $П_2$?
4. У чому сутність способу плоско паралельного переміщення ?

5. Як переміщуються фронтальна і горизонтальна проекції точки при обертанні її навколо осі, перпендикулярної до $П_1$?
6. Як переміщуються фронтальна і горизонтальна проекції точки при обертанні її навколо осі, перпендикулярної до $П_2$?
7. Як переміщуються фронтальна і горизонтальна проекції точки при обертанні її навколо осі, перпендикулярної до $П_3$?
8. У чому полягає сутність способу обертання навколо горизонталі ?
9. Яку кількість переміщень треба зробити щоб визначити відстань між двома паралельними прямими загального положення?
10. Скільки замін площин проекцій треба зробити щоб визначити дійсні розмери двогранного кута ?
11. Як перетворити пряму загального положення у проектуючу?
12. Назвіть чотири основні задачі, які вирішують методом заміни площин проекцій?
13. Чим суттєво відрізняються методи перетворення комплексного креслення?
14. У чому полягає сутність методу обертання навколо фронталі?
15. Як перетворити площину загального положення у площину рівня?

Лекція №5

5.1. Багатогранники. Види багатогранників

5.2. Перетин площини з багатогранником

5.3. Перетин прямої лінії з багатогранником

5.4. Взаємний перетин багатогранників

1. **Піраміда** - це багатогранник, одна грань якого многокутник, а інші грані - трикутники із спільною вершиною. Піраміда називається правильною, якщо в основі лежить правильний багатокутник і висота піраміди проходить через центр багатокутника.

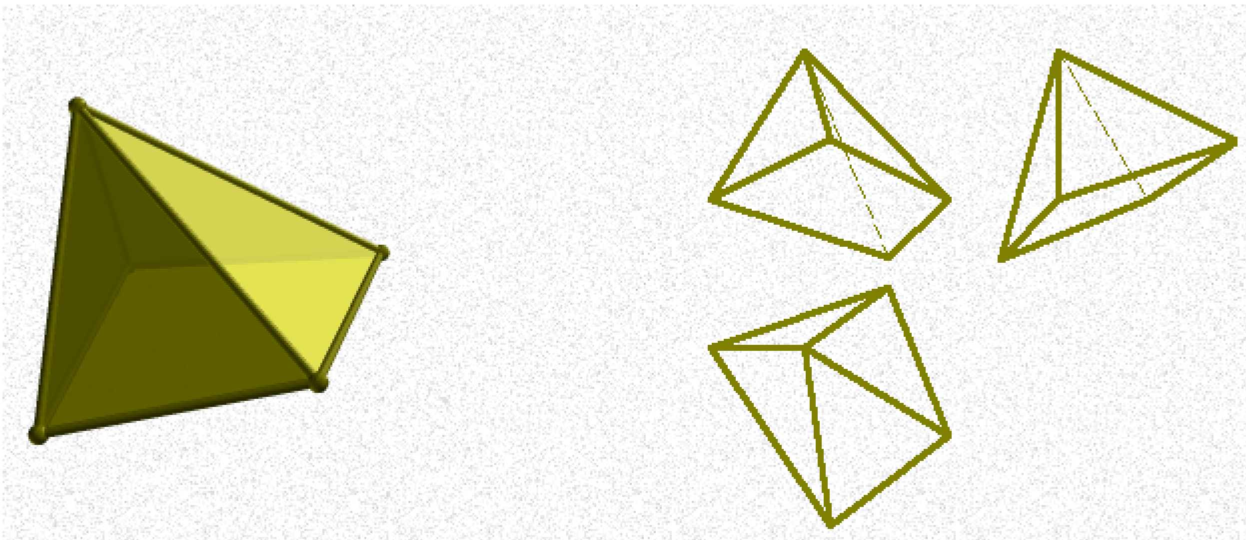


Рис.5.1 - Піраміда

Піраміда називається **усіченою**, якщо вершина її відтинається площиною.

2. **Призма** — це багатокутник, дві грані якого (основи призми) являють собою рівні многокутники із взаємно паралельними сторонами, а всі інші грані паралелограми.

Призма називається прямою, якщо її ребра перпендикулярні до площини основи. Якщо **основою** призми є **прямокутник**, призму називають паралелепіпедом парале**паралелепіпедом**.

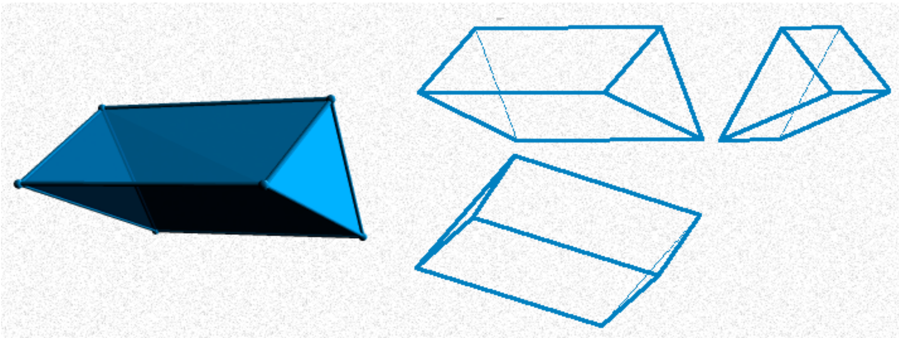


Рис.5.2 - Призма

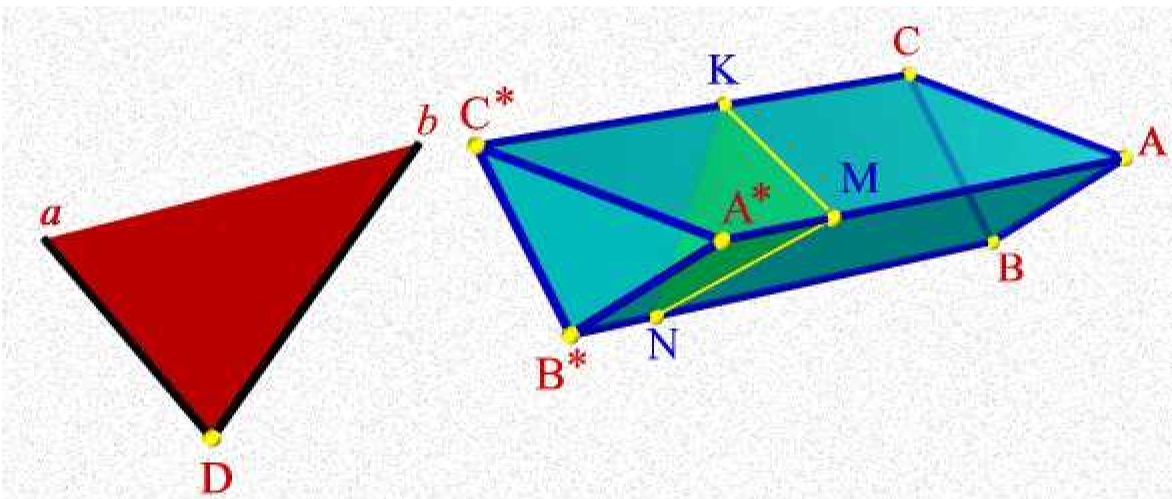
5.2. Перетин площини з многогранником

Побудова перетину многогранника вимагає багаторазового рішення задачі про побудову точки перетину прямої з площиною.

Точки, у яких ребра многогранника перетинаються з заданою площиною, будуть вершинами шуканого перетину.

Той же результат можна одержати, звівши задачу до побудови прямої перетину площини з гранями тіла.

Дана призма і площина загального положення задана двома прямими, які перетинаються, **a** і **b** (рис.5.11). Необхідно знайти перетин призми даною площиною.



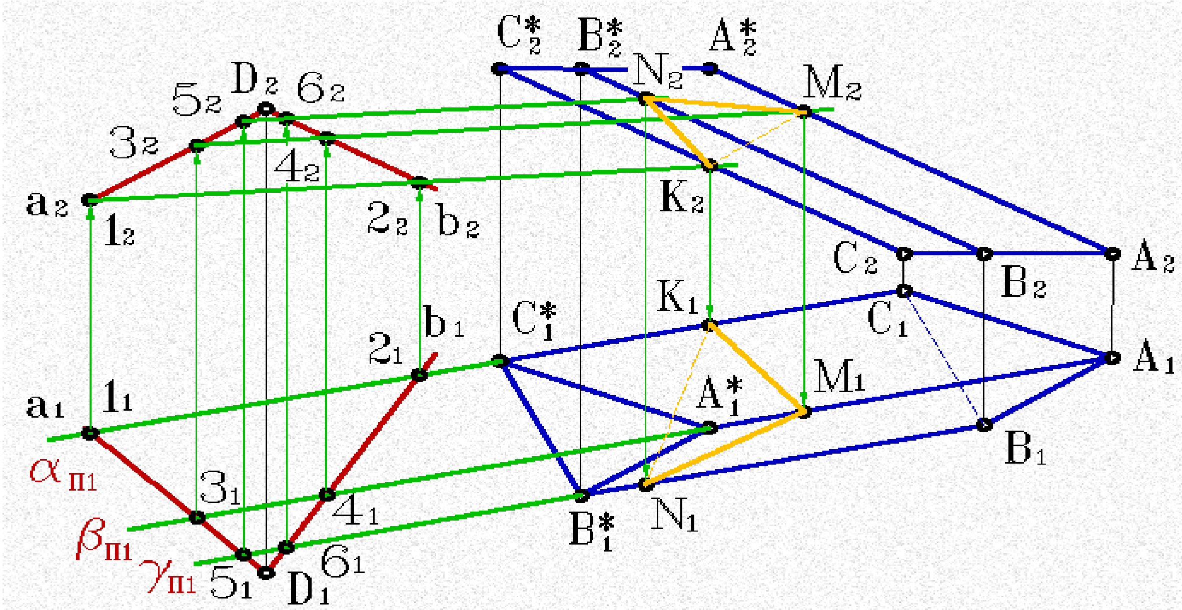


Рис.5.11 - Перетин площини загального положення з призмою

Вирішимо поставлену задачу побудовою точок перетину ребер призми з площиною. Для чого, через горизонтальні проекції ребер проведемо допоміжні січні площини **α**, **β** і **γ**.

Побудувавши лінії перетину допоміжних площин із заданою, знаходимо на фронтальній проекції точки перетину їх з відповідними ребрами призми $\mathbf{K_2}$, $\mathbf{M_2}$ і $\mathbf{N_2}$ – вершини фронтальної проекції перерізу призми. По лініях проекційного зв’язку знаходимо горизонтальні проекції цих точок.

Отримані точки з’єднуємо прямими лініями, з урахуванням видимості.

При рішенні питання про видимість сторін побудованого перерізу варто мати на увазі досить очевидне **правило**: точка і лінія, які лежать на поверхні многогранника, **видимі** тільки в тому випадку, якщо вони розташовані на **видимій** грані.

5.3. Перетин прямої лінії з багатогранником

Для визначення точок перетину прямої лінії з багатогранником, задача зводиться до побудови точок перетину прямої з площинами граней, (рис.5.12).

Алгоритм розв’язування задачі:

1. Провести площину α: $m \in \alpha$.
2. Побудувати переріз багатогранника площиною α.
3. Визначити шукані точки К і М - точки перетину одержаного перерізу з прямою m.

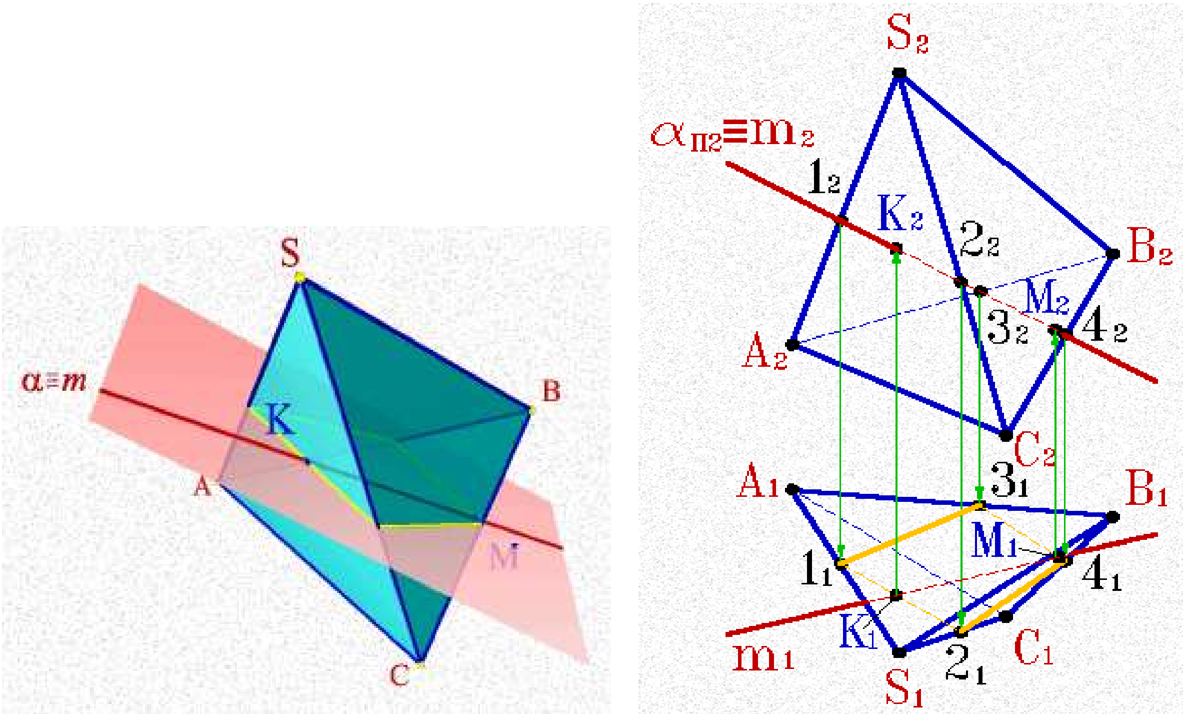


Рис.5.12 - Перетин прямої лінії з пірамідою

5.4. Взаємний перетин багатогранників

Побудову лінії взаємного перетину багатогранних поверхонь можна робити двома способами, комбінуючи їх між собою чи вибираючи з них той, котрий у залежності від умов завдання дає більш прості побудови.

Ці способи такі:

1.Визначають точки, у яких ребра однієї з багатогранних поверхонь перетинають грані іншої і ребра другої перетинають грані першої (задача на перетин прямої з площиною).

Через знайдені точки у визначеній послідовності проводять ламану лінію, що представляє собою лінію перетину даних багатогранників. При цьому можна **з'єднувати прямими проекції лише тих точок**, отриманих у процесі побудови, які **лежать в одній і тій же грані.**

2. **Визначають відрізки прямих, по яких грані однієї поверхні перетинають грані іншої** (задача на перетин двох площин між собою); ці відрізки є ланками ламаної лінії, одержуваної при перетині многогранних поверхонь.

Якщо проекція ребра однієї з поверхонь не перетинає проекції грані другої поверхні хоча б на одній із проекцій, то дане ребро не перетинає цієї грані.

На прикладі (рис.5.13) показаний перетин поверхні трикутної призми з трикутною пірамідою.

Побудова заснована на визначенні точок перетину ребер одного многогранника з гранями іншого.

На рис 5.13 б показана побудова лінії перетин піраміди **ABCS** і трикутної призми **DEFD*E*F***.

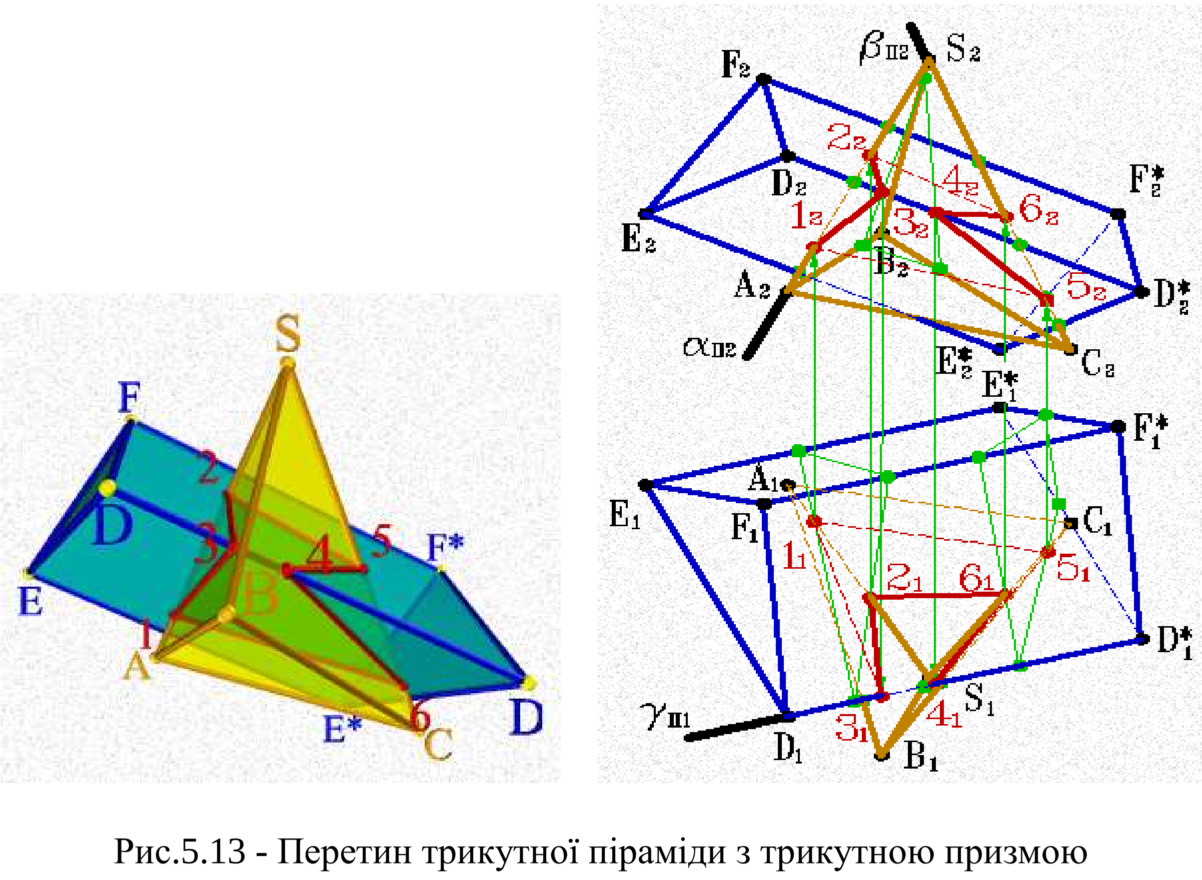


Рис.5.13 - Перетин трикутної піраміди з трикутною призмою

Питання для самоперевірки:

1. Який багатогранник називають призмою?
2. Який багатогранник називають пырамыдою?
3. Який вигляд має лінія перетину двох багатогранників?
4. Перекажіть алгорітм побудови точок перетину прямої з поверхнею багатогранника.

Лекція №6

6.1. Криві лінії. Основні поняття і визначення

6.2. Властивості ортогональних проекцій кривої лінії

6.3. Просторові криві лінії

6.1. Формування поверхні

6.2. Поверхні обертання

6.3. Гвинтові поверхні

6.4. Лінійчаті поверхні з площиною паралелізму (поверхні Каталана)

6.5. Поверхні паралельного переносу

6.1. Криві лінії.

Крива- це безліч точок простору, координати яких є функціями однієї перемінної. **Термін «крива» у різних розділах математики визначається по-різному.**

У нарисній геометрії криву розглядають як траєкторію, описану точкою, яка рухається у просторі, як проекцію іншої кривої, як лінію перетину двох поверхонь, як безліч точок, які володіють якою-небудь загальною для всіх їх властивістю і т.д.

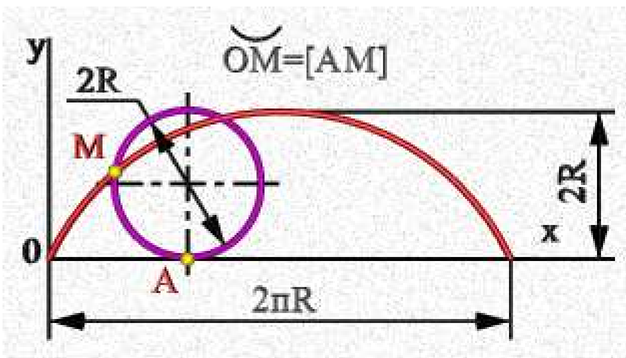


Рис.6.1 - Циклоїда

Наприклад, (рис.6.1) ***циклоїда*** – траєкторія руху точки кола, що котиться без ковзання по прямої лінії. Ця крива складається із ряду «арок», кожна з якої відповідає повному обороту кола.

Криві лінії, усі точки яких належать одній площині, називаються ***плоскими***, інші просторовими.

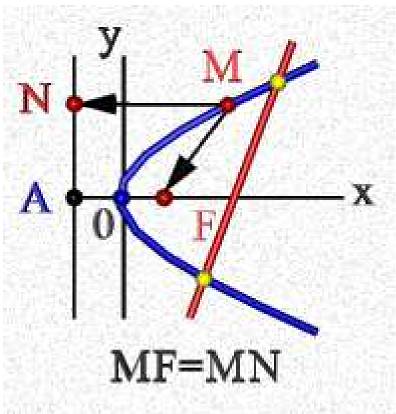
Кожна крива містить у собі геометричні елементи, що складають її **визначник**, тобто сукупність незалежних умов, що однозначно визначають цю криву.

Різні і способи задання кривих:

- **Аналітичний** – крива задана математичним рівнянням;
- **Графічний** – крива задана візуально на носії графічної інформації;
- **Табличний** – крива задана координатами послідовного ряду точок.

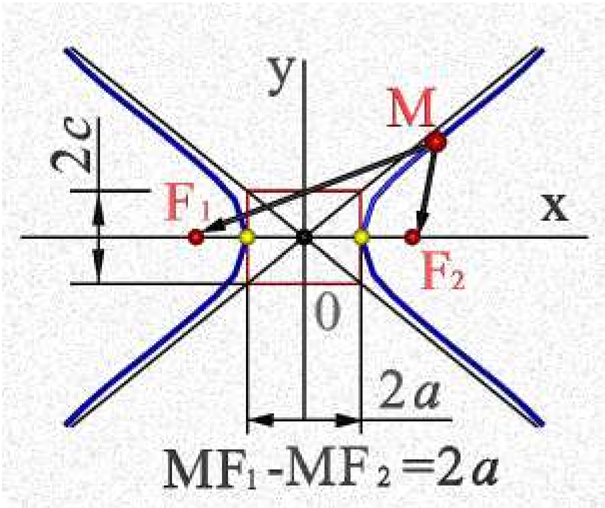
Порядок плоскої алгебраїчної кривої лінії визначається **найбільшим числом точок** її перетинів з прямою лінією. Будь-яка пряма лінія може перетинати алгебраїчну криву лінію **n**-ого порядку не більш ніж у **n** точках.

Розглянемо кілька прикладів алгебраїчної кривої лінії:



1.*Парабола* – крива другого порядку, пряма перетинає її в двох точках. При цьому парабола може бути визначена як: -безліч точок ***M*(*xy*)** площини, відстань **FM** яких до визначеної точки **F** цієї площини (фокуса параболи) дорівнює відстані **MN** до визначеної прямої **AN** - директриси параболи; лінія перетину прямого кругового конуса площиною, що не проходить через вершину конуса і паралельна якій небудь дотичній площині цього конуса;

- у прямокутній системі координат **0xy** з початком у вершині параболи і віссю **0x** спрямованої по осі параболи рівняння параболи має так званий канонічний вид **$y^2=2px$,** де **p** (фокальний параметр) - відстань від фокуса до директриси.

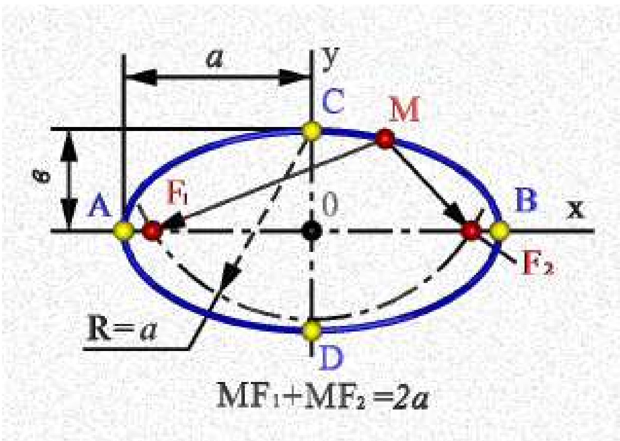


2. ***Гіпербола***: крива другого порядку безліч точок **M** площини різниця (по абсолютній величині) відстаней $\mathbf{F_1M}$ і $\mathbf{F_2M}$ яких до двох визначених точок $\mathbf{F_1}$ і $\mathbf{F_2}$ цієї площини (фокусів гіперболи) постійна:

$$\mathbf{F_1M - F_2M = 2a < 2c}$$

Середина **0** відрізка $\mathbf{F_1F_2}$ (фокусні відстані) називається **центром** гіперболи;

- лінія перетину прямого кругового конуса площиною, що не проходить через вершину конуса і перетинає обидві його порожни.
- у прямокутній системі координат **0xy** з початком у центрі гіперболи, на осі **0x** якої лежать фокуси гіперболи, рівняння гіперболи має так званий канонічний вид $\mathbf{x^2/a^2 - y^2/y^2=1,\ y^2=з^2 - a^2}$**, де a і y довжини півосей гіперболи.**



3. **Еліпс** :

- безліч точок **M** площини, сума відстаней $\mathbf{MF_1}$ і $\mathbf{MF_2}$ яких до двох визначених точок $\mathbf{F_1}$ і $\mathbf{F_2}$ (фокусів еліпса) постійна $\mathbf{MF_1+MF_2=2a}$.

Середина **0** відрізка $\mathbf{F_1F_2}$ (фокусні відстані) називається **центром** еліпса;

- лінія перетину прямого кругового конуса площиною, яка не проходить через вершину конуса і перетинає усі прямолінійні твірні однієї порожнини цього конуса;
- у прямокутній системі координат **0xy** з початком у центрі еліпса, на осі **0x** якої лежать фокуси еліпса рівняння еліпса має наступний вид:

$\mathbf{x^2/a^2+y^2/b^2=1}$, де **a** й **b** - довжини великої і малої півосей еліпса. При **a**=**b** фокуси $\mathbf{F_1}$ і $\mathbf{F_2}$ збігаються і зазначене рівняння визначає коло, яке розглядається як окремий випадок еліпса.

Порядок просторової алгебраїчної кривої лінії визначається **найбільшим** числом точок її перетинів площиною загального

Особливий інтерес представляють коло і циліндрична гвинтова лінії, кожна з якої є еталоном відповідно плоских і просторових кривих ліній.

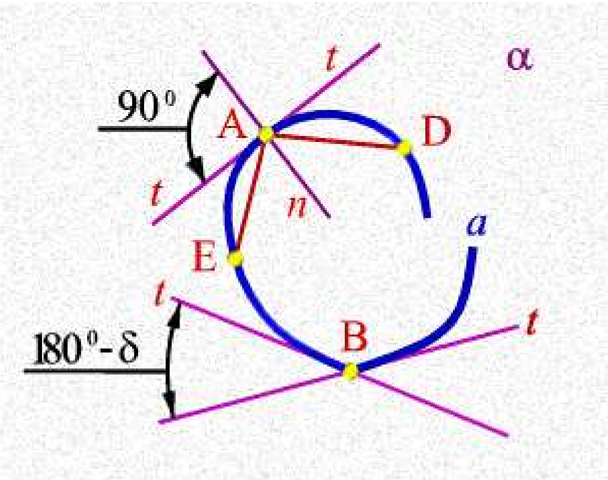
У практиці конструювання ліній і поверхонь широко використовуються **обводи**. Це криві, складені з дуг різних кривих, визначених парами суміжних точок.

Обводом ряду точок площини є плоска крива, простору - просторова. Точки стику дуг називаються вузлами.

Обвід заданий координатами своїх точок називається **дискретним**.

Обвід називається **гладким**, якщо дуги обводу у вузлах мають спільні дотичні.

Плоска крива **a** побудована в площині **a** (рис.6.6).



Через точку **A** проведені січні хорди **AE** і **AD**. Якщо точку **E** наближати до точки **A**, січна **AE** повертається навколо точки **A**.

Коли точка **E** збіжиться з точкою **A** (**A≡E**), січна **AE** досягне свого граничного положення **t**.

Рис. 6.6

У цьому граничному положенні січна називається напівдотичною до кривої **a** в точці **A**.

Січна **AD** у граничному положенні **A≡D** також представлена напівдотичною **t**.

Крива лінія в точці **A** має дві напівдотичні прямі, що збігаються і визначають одну дотичну до кривої лінії в точці **A** – крива в цій точці називається **плавною.**

Крива плавна у всіх її точках називається **плавною кривою лінією**.

Нормаллю n у точці **A** кривої лінії називається перпендикуляр до дотичної.

На кривої лінії можуть бути точки де різнонаправлені напівдотичні не належать на одній прямій, а складають між собою кут. Так на кривій **a** в точці **B** кут **δ** між напівдотичними не дорівнює 180^0. Точка **B** в цьому випадку називається точкою **зламу** або **випадаючою** точкою.

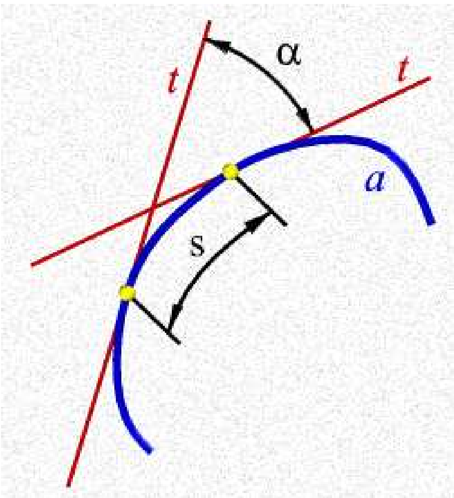


Рис.6.7 - Крива лінія, як траєкторія точки

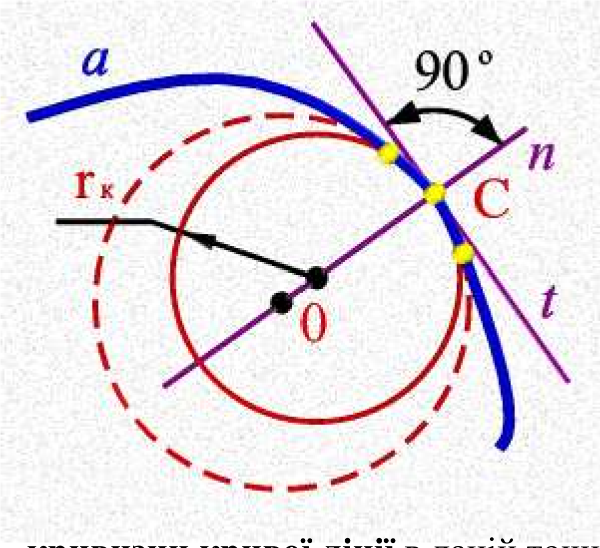
Плоску криву лінію можна розглядати як траєкторію руху точки в площині (рис.6.7); точка рухається по дотичній до кривої лінії, обкатуючи цю криву без ковзання.

Рух точки уздовж кривої **a** зв'язаний з безупинною зміною двох величин: відстані **S**, на яку віддалена точка від початкового положення і кута **α** повороту дотичної щодо початкового положення.

Якщо зі збільшенням шляху **S** безупинно збільшується і **α**, крива називається **простою**.

Кривизна довільної кривої лінії в різних точках різна, в окремих точках вона може дорівнювати нулю. Такі точки називаються точками **випрямлення**.

Кривизна в кожній із точок плоскої кривої **a** визначається за допомогою дотичного в цій точці кола (рис.6.8).



Дотичним колом чи колом кривизни в даній точці називається граничне положення кола, коли воно проходить через дану точку і дві інші нескінченно близькі до неї точки.

Центр дотичного кола називається **центром кривизни кривої** в даній точці, а радіус такого кола – **радіусом кривизни кривої лінії** в даній точці.

Безліч центрів кривизни кривої є крива лінія- її називають **еволютою** даної кривої, а крива стосовно своєї еволюти називається **евольвентою**.

6.2. Властивості ортогональних проекцій кривої лінії

1. Проекцією кривої лінії є крива лінія;
2. Дотична до кривої лінії проектується в дотичну до її проекції;
3. Невласна точка кривої проектується в невласну точку її проекції;
4. Порядок лінії – проекції алгебраїчної кривої дорівнюють порядку самої кривої або менше;
5. Число вузлових точок (у яких крива перетинає сама себе) проекції дорівнює числу вузлових точок самої кривої.

Випадки коли, плоска крива проектується в пряму (властивості 1,4,5), а дотична в точку (властивість 2) не враховуються.

6.3. Просторові криві лінії

Просторові криві лінії в нарисній геометрії звичайно розглядаються як результат перетину поверхонь або як траєкторію руху точки.

Просторову, так само як і плоску, криву лінію на кресленні задають послідовним рядом точок.

Класичним прикладом просторових кривих ліній є **циліндрична** і **конічна** гвинтові лінії.

Циліндрична гвинтова лінія

Таку лінію в просторі описує точка, що рухається по якій-небудь прямій твірній кругової циліндра, що обертається навколо своєї осі так, що шлях, який проходить точка по твірній пропорційний куту її повороту, (рис. 6.9).

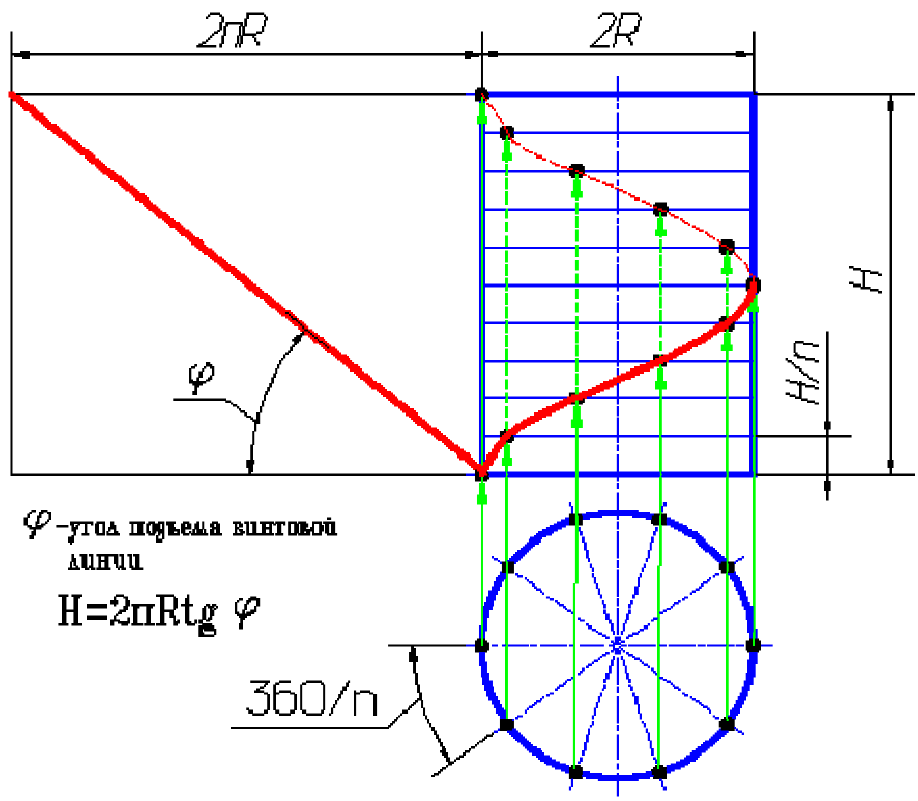
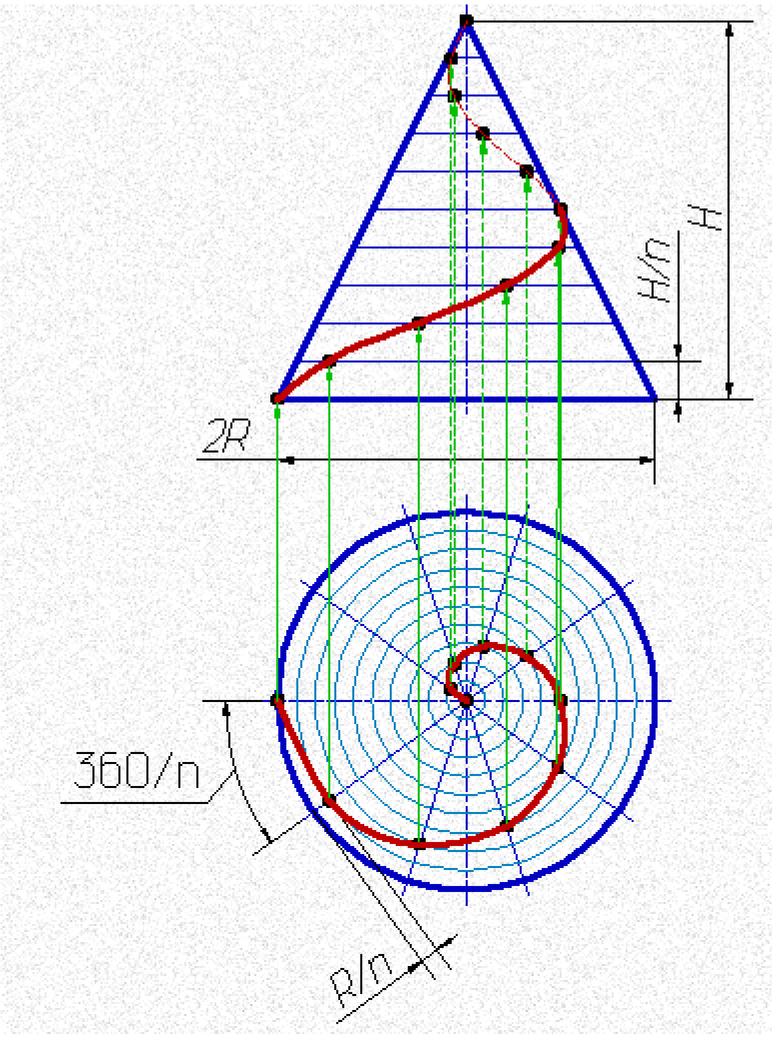


Рис.6.9 - Циліндрична гвинтова лінія (права)

Зміщення точки уздовж твірної за один оборот називається ***кроком*** циліндричної гвинтової лінії.Розрізняють праву і ліву гвинтові лінії.

Конічна гвинтова лінія

Таку лінію описує точка, що рухається по якій-небудь прямолінійній твірній кругової конуса, яка обертається навколо своєї осі так, що шлях пройдений точкою по твірній, пропорційний куту повороту твірної конуса (рис.6.10).



Проекція на вісь конуса зміщення точки вздовж твірної за один оберт називається **кроком** конічної гвинтової лінії. Горизонтальною проекцією конічної гвинтової лінії є спіраль **Архімеда** - одна із чудових плоских кривих ліній.

Рис.6.10 - Конічна гвинтова лінія

6.4. Формування поверхні

Існує два способи формування поверхні:

1. Рухом лінії.
2. Рухом поверхні.

У першому випадку поверхня **Ф** являє собою безліч послідовних положень **l_1,l_2…**лінії **l** , рух і форма якої підлеглі деякому закону (рис.6.1).Цю лінію прийнято називати **твірною.**

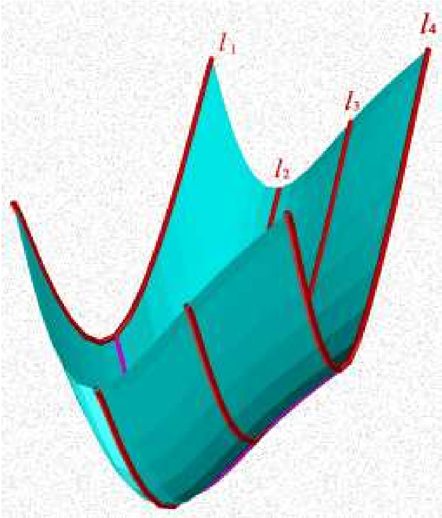


Рис.6.1 - Поверхня утворена рухом лінії

Прикладом такого способу можуть служити всі технологічні процеси обробки металів різальним пругом, коли поверхня виробу несе на собі «відбиток» пруга різця, який ріже, тобто її поверхню можна розглядати як безліч, ліній конгруентних профілю різця.

По виду твірної розрізняють поверхні **лінійчаті** і **нелінійчаті**, твірна перших – **пряма** лінія, других – **крива**. Лінійчаті поверхні у свою чергу розділяють на так звані **розгортні**, котрі можна без складок і розривів розгорнути на площину і **нерозгортні,** які не відповідають попередній вимозі.

Значний клас поверхонь формується рухом кола постійного чи змінного радіуса. Це так звані **циклічні** поверхні (рис.6.2).

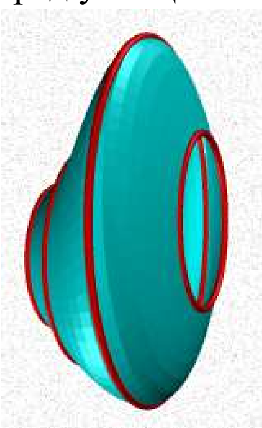


Рис. 6.2 - Циклічна поверхня

Якщо ж групувати поверхні за законом руху твірної лінії і утворювальної поверхні, то більшість поверхонь, що зустрічаються в техніці, можна розділити на:

- Поверхні обертання;
- Гвинтові поверхні;
- Поверхні з площиною паралелізму;
- Поверхні переносу.

Особливе місце займають такі нелінійні поверхні, утворення яких, не підлягає ні якому закону.

Оптимальну форму таких поверхонь визначають тими фізичними умовами, в яких вони працюють і встановлюють її форму експериментально (поверхні лопаток турбін, обшивка каркасів морських судів і літаків).

Множина ліній, що заповнюють поверхню так, що через кожну точку поверхні проходить у загальному випадку одна лінія цієї множини, називається **каркасом** поверхні.

Поверхня може бути задана і кінцевою множиною точок, який прийнято називати **точечним каркасом**.

Проекції каркаса можуть бути побудовані, якщо заданий **визначник** поверхні – сукупність умов, що задають поверхню в просторі і на кресленні.

Розрізняють дві частини визначника: геометричну й алгоритмічну.

Геометрична частина визначника являє собою набір постійних геометричних елементів (точок, прямих, площин і т.п.), що можуть і не входити до складу поверхні.

Друга частина – **алгоритмічна** (описова) – містить перелік операцій, що дозволяє реалізувати перехід від фігури постійних елементів до неперервного каркаса.

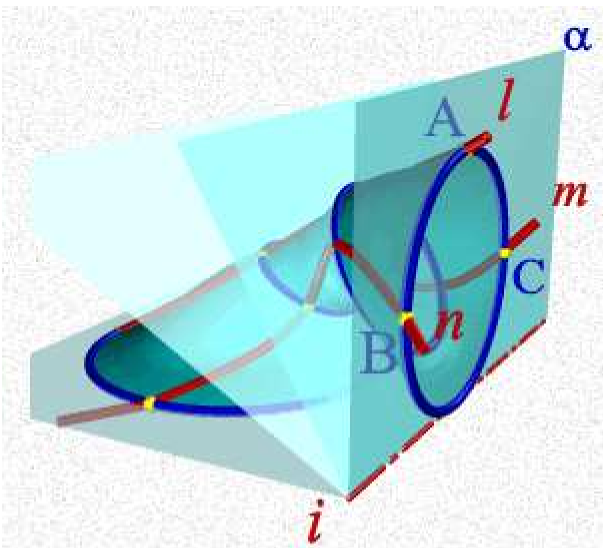


Рис.6.3 - Утворення циклічної поверхні

Наприклад, циклічна поверхня, каркас якої складається з кіл (рис.6.3),може бути заданий у такий спосіб:

- Геометрична частина визначника: три направляючих **l, m, n**, вісь **i** пучка площин.

- Алгоритмічна частина: виділяємо з пучка площин з віссю **i** площину α; знаходимо точки **A**, **B**, **C**, у яких α перетинає відповідно направляючі **l, m, n**. Будуємо коло, обумовлене трьома знайденими точками. Переходимо до наступної площини пучка і повторюємо побудову.

6.5. Поверхні обертання

Поверхні обертання – це поверхні створені при обертанні твірної **m** навколо осі **i** (рис.6.4).

Геометрична частина визначника складається з двох ліній: твірної **m** та осі **i** (рис 6.4).

Алгоритмічна частина включає дві операції:

1. На твірній **m** виділяють ряд точок **A, B, C, …F**;
2. Кожну точку обертають навколо осі **i**.

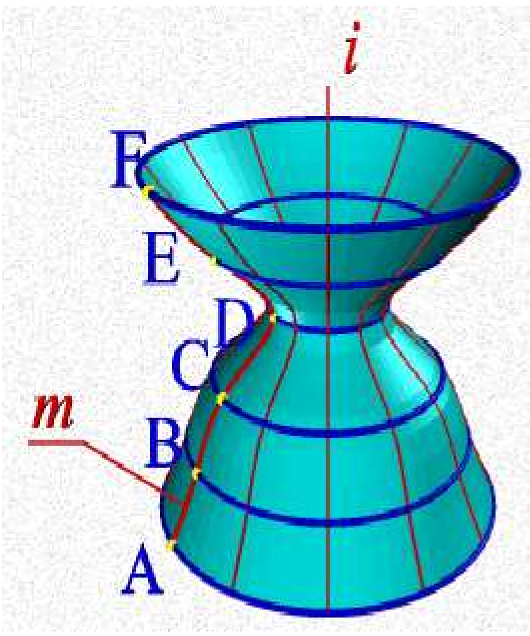


Рис. 6.4 - Утворення поверхні обертання

Так створюється каркас поверхні, що складається з безлічі кіл (рис.6.5), площини яких розташовані перпендикулярно до осі **i**. Ці кола називаються **паралелями**; найменша паралель називається **горлом**, найбільша – **екватором**.

З закону утворення поверхні обертання випливають дві основних властивості:

1. Площина перпендикулярна осі обертання, перетинає поверхню по колу – **паралелі**.
2. Площина, що проходить через вісь обертання, перетинає поверхню по двохсиметричним щодо осі лініям – **меридіанам**.

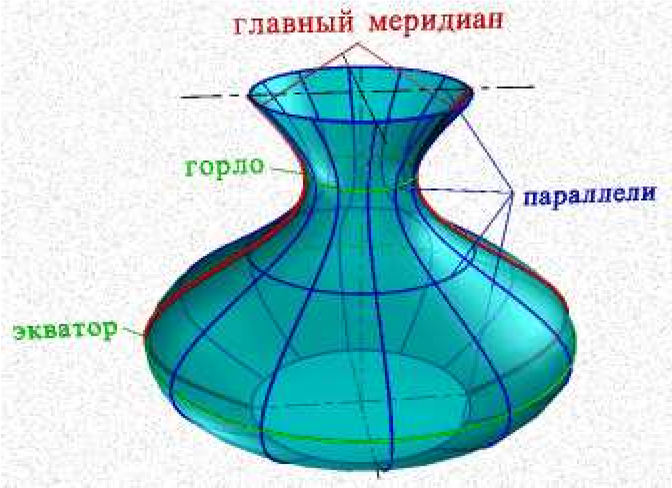
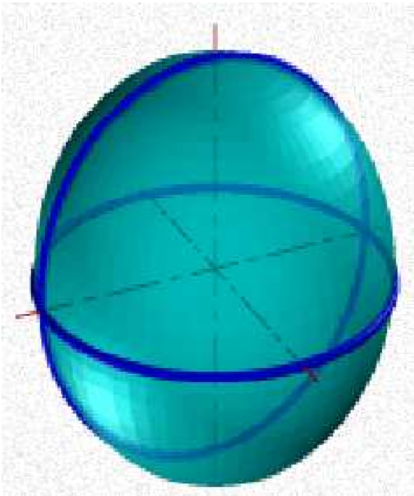


Рис. 6.5 - Поверхня обертанн

Площина, яка проходить через вісь обертання паралельно до фронтальної площини проекцій називається **площиною головного меридіана**, а лінія, отримана в перетині, – **головним меридіаном**.

Сфера – утворюється обертанням кола навколо його діаметра (рис.6.6).

.



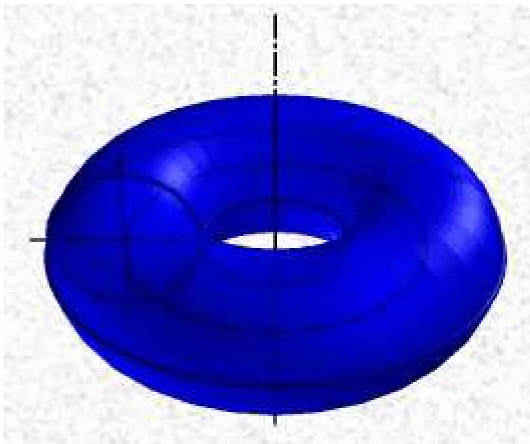
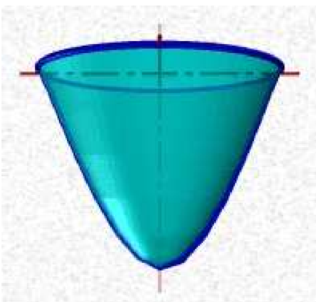


Рис. 6.6 - Утворення сфери

Рис.6.7 - Тор

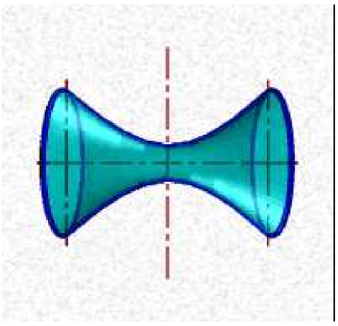
Тор – поверхня тора формується при обертанні кола навколо осі, що не проходить через центр цього кола, (рис.6.7).

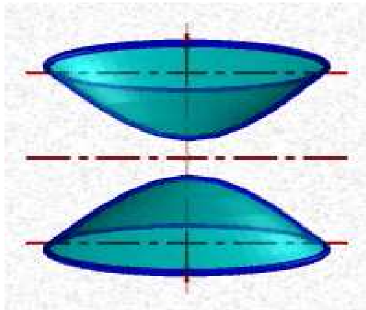
Параболоїд обертання – утвориться при обертанні параболи навколо своєї осі (рис.6.8).



Гіперболоїд обертання – розрізняють одно, (рис.6.9а) і дво (рис.6.9б) порожнинний гіперболоїди обертання.

Перший виходить при обертанні навколо уявної осі, а другий – обертанням гіперболи навколо дійсної осі.





Гіперболоїд обертання

6.6. Гвинтові поверхні

Гвинтові поверхні утворюються гвинтовим рухом деякої лінії – **твірної**.

Під гвинтовим рухом розуміється сукупність двох рухів: **поступального** - паралельно до деякої осі, і **обертального**, навколо тієї ж осі.

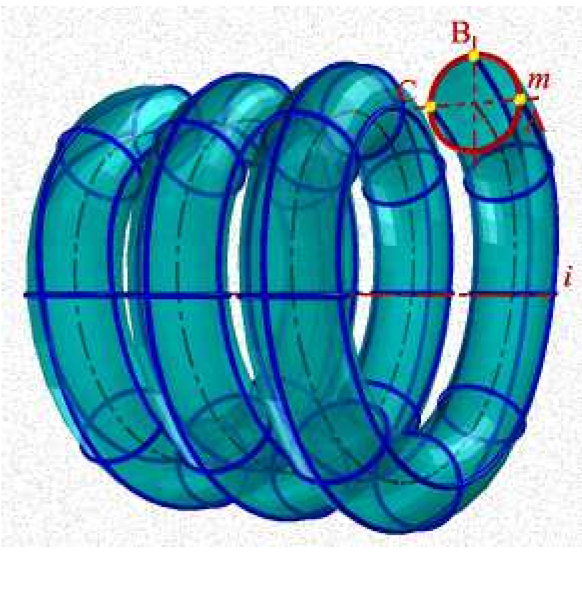


Рис.6.10 - Гвинтова поверхня

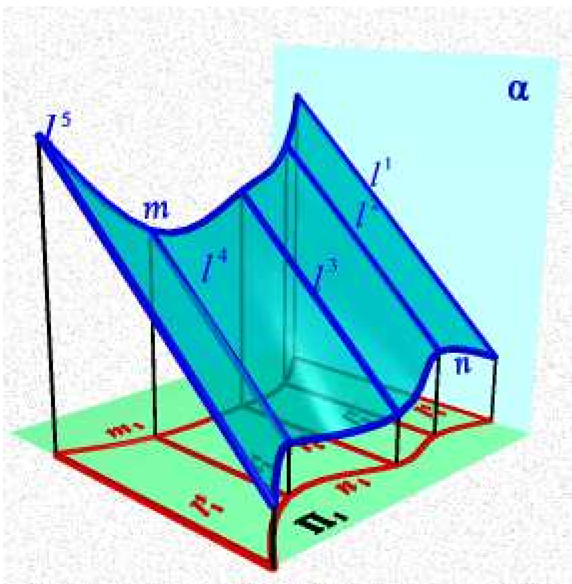
При цьому поступальне і кутове переміщення знаходяться у визначеній залежності **Δh** = **kΔv**, де **Δh** – лінійне переміщення за час **Δt**, **Δv** – кутове переміщення за той же час, **k** – коефіцієнт пропорційності. Якщо **k=Const**, то крок поверхні постійний.

Геометрична частина визначника гвинтової поверхні ні чим не відрізняється від поверхні обертання і складається з двох ліній: твірної **m**, і осі **i**, (рис.6.12).

Алгоритмічна частина:

1. На твірній **m** виділяють ряд точок **A**, **B**, **C**, **...**
2. Будують гвинтові лінії заданого кроку і напрямку, по яких переміщаються задані точки.

6.7. Лінійчаті поверхні з площиною паралелізму (поверхні Каталана)

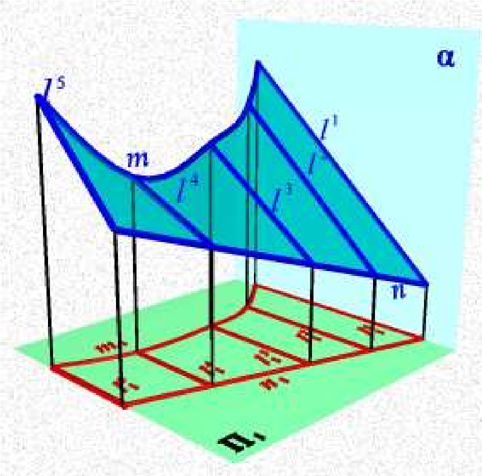


Поверхня з площиною паралелізму являє собою множину прямих ліній **l** (твірних), які паралельні до деякої площини α (площини паралелізму) і при цьому перетинають дві дані напрямні **m** і **n**.В залежності від форми напрямних, утворюються три види поверхонь.

Циліндроїд. Циліндроїдом називається поверхня, утворена рухом прямолінійної твірної по двох напрямних - кривих лініях.

При цьому твірна у всіх своїх положеннях залишається паралельною до площини паралелізму.

Коноїд. Коноїдом називається поверхня, утворена рухом прямолінійної твірної по двох напрямних, одна з яких крива лінія, а інша пряма, при цьому твірна у всіх положеннях паралельна до площини паралелізму (рис.6.11).



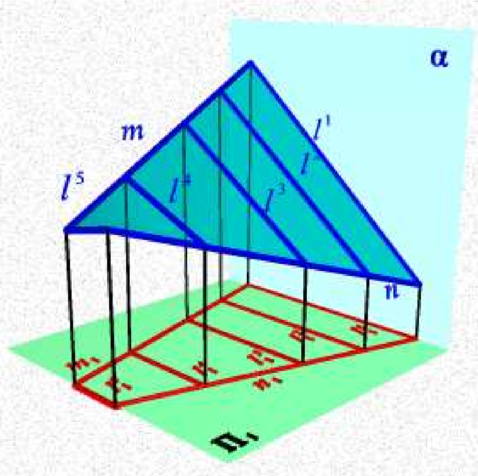


Рис 6.11 - Каноїд

Рис. 6.12 - Гіперболічний параболоїд.

Гіперболічний параболоїд. Гіперболічним параболоїдом або косою площиною називається поверхня, утворена рухом прямолінійної твірної, паралельної до площини паралелізму, по двох напрямним лініям – мимобіжним прямим (рис.6.12).

6.8. Поверхні паралельного переносу

Поверхнею паралельного переносу називається поверхня, утворена поступальним плоскопаралельним переміщенням твірної - плоскої кривої лінії **m** по криволінійній напрямній **n,** (рис.6.13).

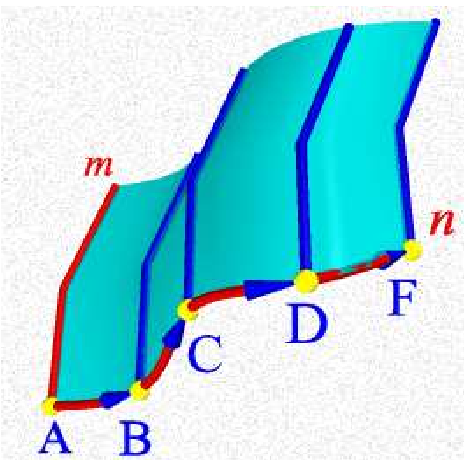


Рис.6.13 - Поверхня паралельного переносу

Геометрична частина визначника складається з **двох кривих** ліній **твірної - m** і **напрямної – n**.

Алгоритмічна частина визначника містить перелік операцій:

1. На напрямній **n** вибираємо ряд точок **A**, **B**, **C**,…
2. Будуємо вектори **AB** , **BC**,…

3. Здійснюємо паралельний перенос лінії **m** по векторах **AB**, **BC** , …

Наочним прикладом площини паралельного переносу може служити ковзальна опалубка, яка застосовується в будівництві.

Запитання для самоперевірки:

1.Як утворюється поверхня обертання?

2. Яка лінія носить назву -”горло” ?

3. Що називається “ головним мередіаном” ?

Лекція №7

7.1. Лінія і точка, що належать поверхні

7.2. Перетин поверхні площиною

7.3. Конічні перерізи

7.1. Лінія і точка, що належать поверхні

Для визначення належності точки і лінії поверхні розглянемо наступні позиційні задачі:

Задача 1. Побудова лінії, яка належить поверхні, якщо одна з проекцій лінії задана, (рис. 7.1).

Дано:

1.Поверхня **Ф** , задана проекціями каркаса, який складається з твірних ліній **l** і напрямної **n**.

2. Проекція лінії $\mathbf{m_2}$, що належить поверхні **Ф**.

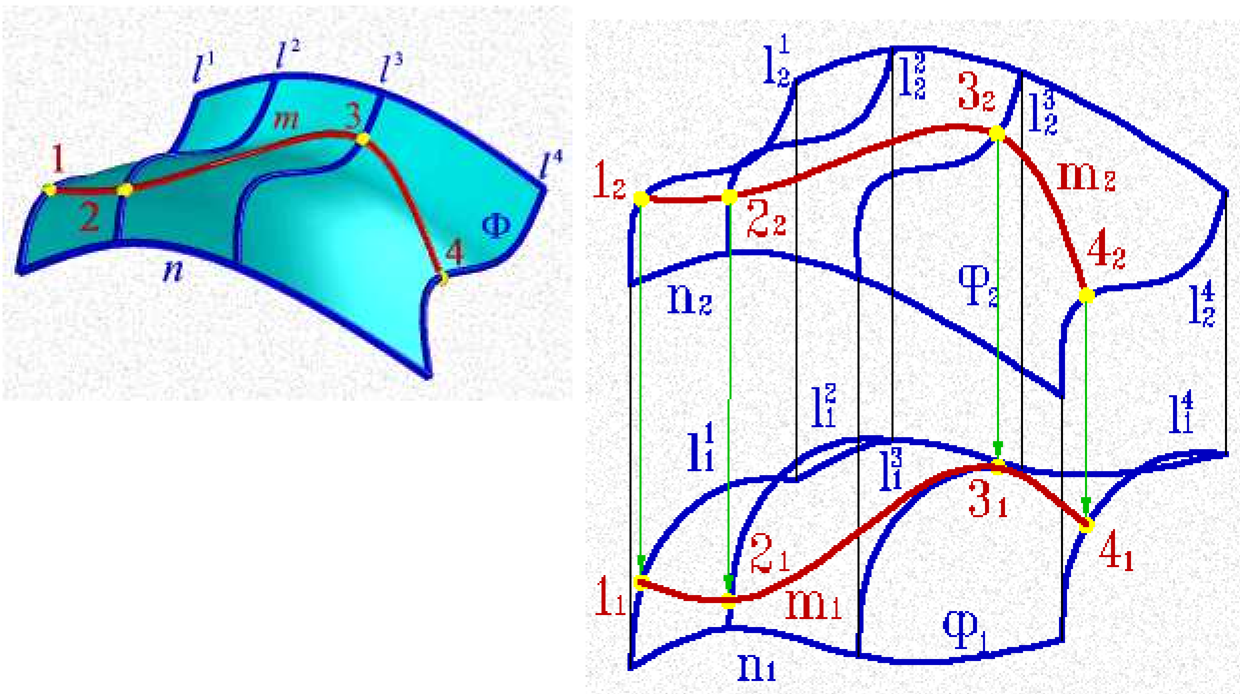


Рис.7.1 - Лінія на поверхні

Алгоритм розв’язування задачі:

1. Знаходимо точки $\mathbf{1_2}$, $\mathbf{2_2}$, $\mathbf{3_2}$, $\mathbf{4_2}$ перетину проекції лінії $\mathbf{m_2}$ із проекцією каркаса поверхні, тобто відповідно з проекціями ліній $\mathbf{l_2^1}$, $\mathbf{l_2^2}$, $\mathbf{l_2^3}$, $\mathbf{l_2^4}$.

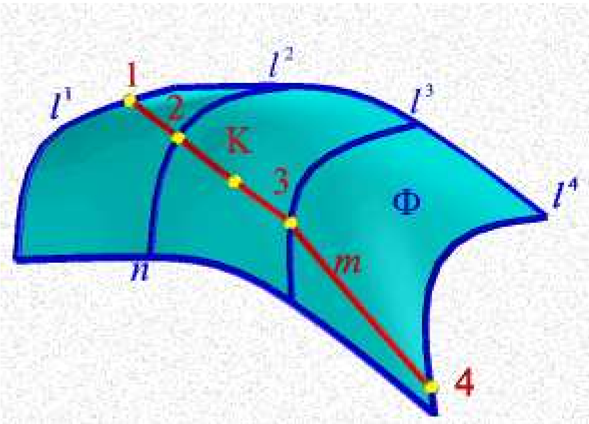
2. По лініях проекційного зв’язку знаходимо проекції точок $\mathbf{1_1}$, $\mathbf{2_1}$, $\mathbf{3_1}$, $\mathbf{4_1}$, як точки, які лежать на проекціях твірних каркаса відповідно $\mathbf{l_1^1}$, $\mathbf{l_1^2}$, $\mathbf{l_1^3}$, $\mathbf{l_1^4}$ і визначають положення проекції лінії $\mathbf{m_1}$ на поверхні **Ф**.

Задача 2. По одній проекції точки, що належить поверхні, знайти точку на поверхні, (рис. 7.2).

Дано:

1. Поверхня **Ф** , задана проекціями каркаса, який складається з твірних **l** і напрямних **n**.

2. Проекція точки $\mathbf{K_1}$, що належить поверхні **Ф**.



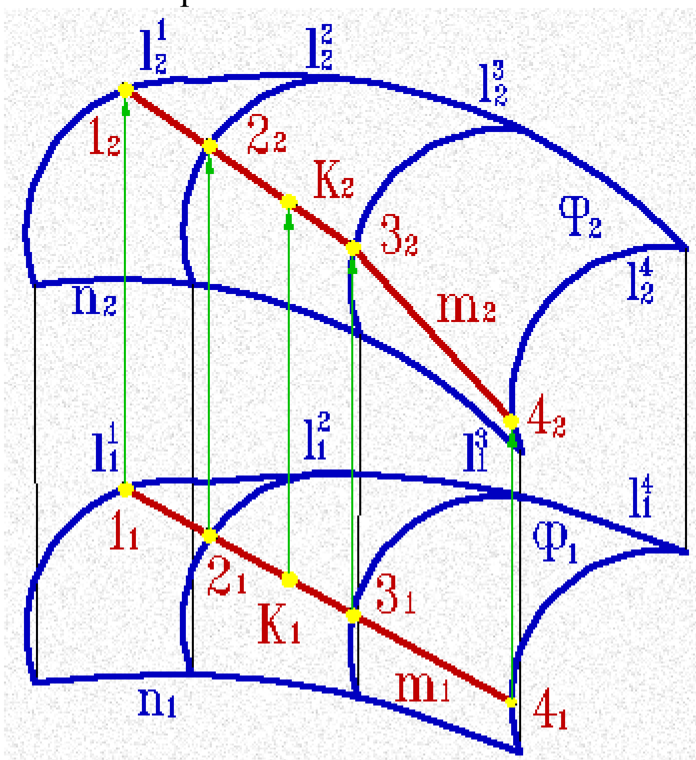


Рис. 7.2 - Точка на поверхні

Алгоритм розв’язування задачі:

1. Через задану проекцію точки $\mathbf{K_1}$ проводимо однойменну проекцію довільної допоміжної лінії $\mathbf{m_1}$, яка належить поверхні.

2. Знаходимо допоміжну лінію **m** на поверхні **Ф** по алгоритму

рішення задачі №1.

3. По лінії проекційного зв'язку знаходимо положення точки **К**, як точки, яка належить допоміжній лінії **m**.

7.2. Перетин поверхні площиною

У залежності від положення площини стосовно площин проекцій, складність розв'язку позиційної задачі, по визначенню лінії перетину її з поверхнею істотно міняється. Найбільш простим є випадок, коли площина, яка перетинає поверхню, є проектуючою.

Розглянемо розв'язування задачі по визначенню лінії перетину сфери фронтально проектуючою площиною **α,** (рис.7.3).

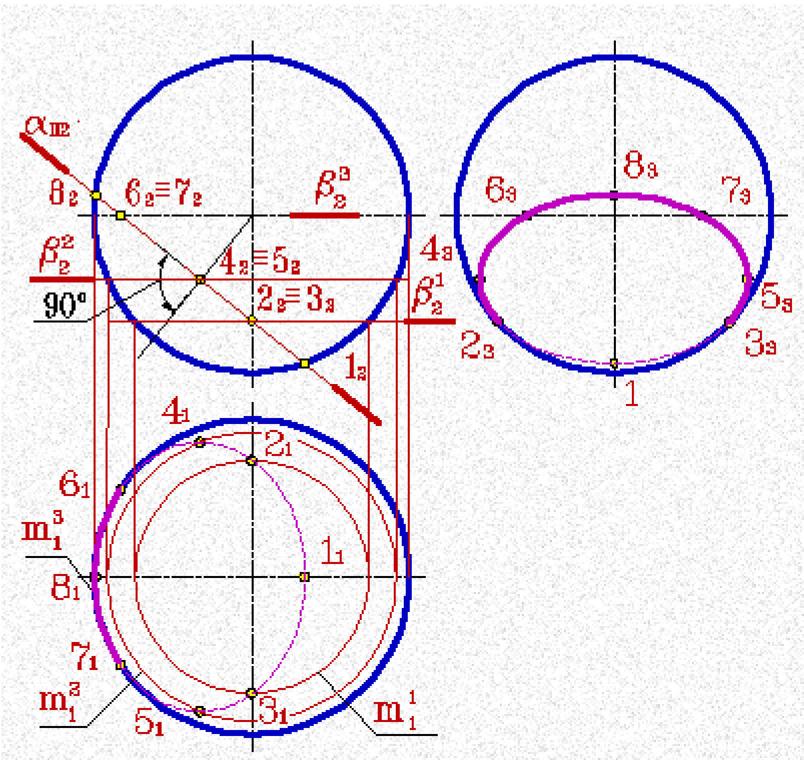


Рис. 7.3 - Перетин сфери фронтально проектуючою площиною

Коло, по якій площина α перетинає сферу, проектується на площині Π_1 і Π_3 у виді еліпса, а на площину Π_2 у пряму лінію обмежену нарисом сфери.

Охарактеризуємо обрані для побудови точки:

- 1, 8- дві вершини еліпса, що визначають положення малої осі, їхні фронтальні проекції визначають перетин сліду площини α з нарисом сфери, а горизонтальні проекції є відповідно вищою і нижчою точками перетину;

- 2, 3- фронтальні проекції цих точок лежать на вертикальній осі сфери, а профільні проекції будуть лежати на нарисі сфери і визначати зону видимості при побудові еліпса на $\mathbf{П_3}$;
- 4, 5- дві вершини еліпса, що визначають положення великої осі еліпса, положення їхньої фронтальної проекції визначає перпендикуляр, опущений з центра сфери до сліду площини α**;**
- 6, 7- Фронтальні проекції цих точок лежать на горизонтальній осі сфери, тобто належать екватору сфери, їхня горизонтальна проекція лежить на нарисі сфери і визначає зону видимості при побудові еліпса на $\mathbf{П_1}$.

Лінія перетину площини α і сфери на фронтальній площині проекцій збігається зі слідом площини на ній відзначаємо точки $\mathbf{1_2...8_2}$. Для побудови горизонтальних проекцій цих точок у загальному випадку використовується метод допоміжних січних площин (β- горизонтальні площини рівня) . Наприклад, через точки $\mathbf{2_2}$, $\mathbf{3_2}$ проведемо слід площини β_2^1 , на горизонтальній площині проекцій лінією перетину площини β^1 і сфери буде коло $\mathbf{m_1^1}$, а точки $\mathbf{2_1}$ і $\mathbf{3_1}$ лежать на цьому колі по лінії проекційного зв’язку (у даному випадку осьової лінії). У такий спосіб знаходяться всі точки, крім $\mathbf{1_1}$ і $\mathbf{8_1}$, які через своє положення на нарисі фронтальної проекції сфери будуть належати горизонтальній осьовій лінії на площині $\mathbf{П_1}$. Побудовані точки $\mathbf{1_1...8_1}$ з’єднаємо плавною кривою лінією з урахуванням видимості.

Задача, коли сферу перетинає площина загального положення, наприклад заданна двома прямими, які перетинаються $\alpha(\mathbf{h}\cap\mathbf{f})$ розв’язується у такий спосіб:

1. Зробимо заміну площин проекцій таким чином, щоб площина α стала проектуючою, тобто переведемо площину загального положення в

особливе. **h** – горизонталь, **f**- фронталь, щоб перевести площину α у положення площини проектуючої, необхідно вибрати нову площину проекцій, або перпендикулярно горизонтальній проекції горизонталі $\mathbf{h_1}$, або перпендикулярно фронтальній проекції фронталі – $\mathbf{f_2}$, (рис.7.4).

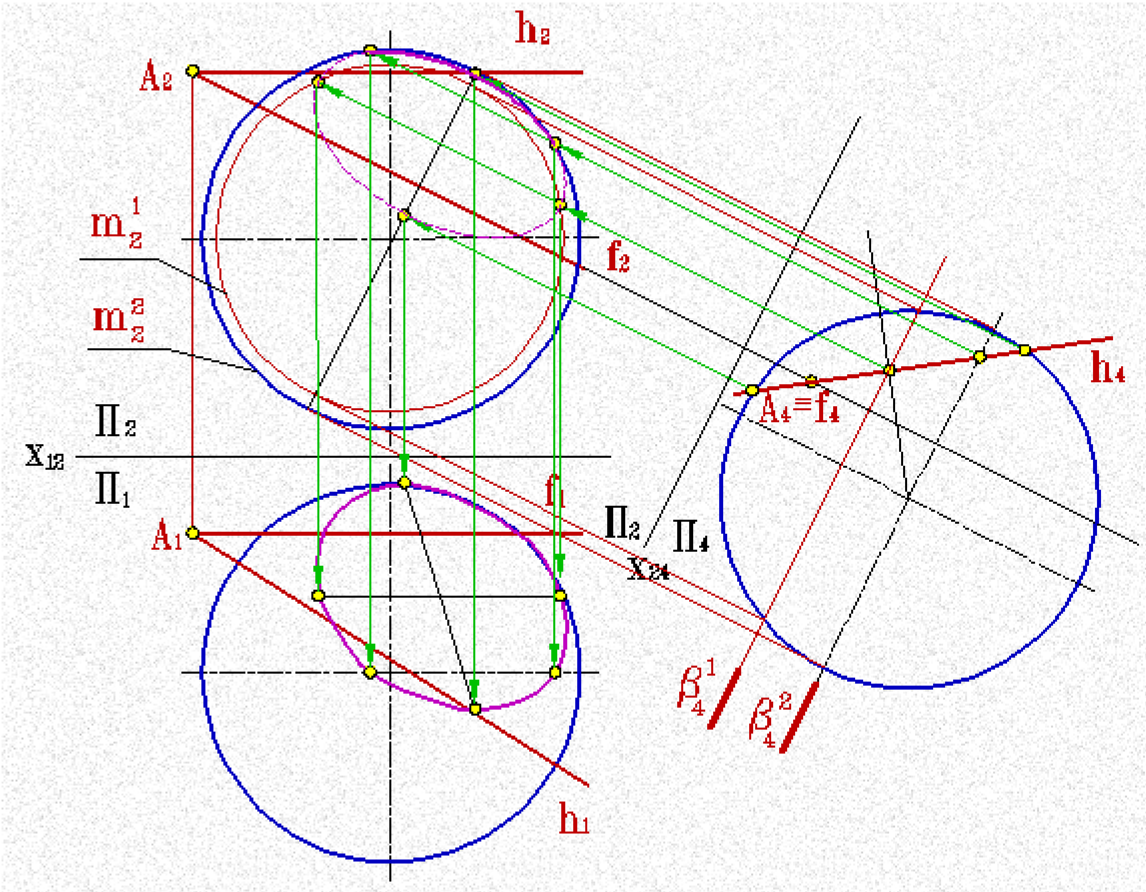
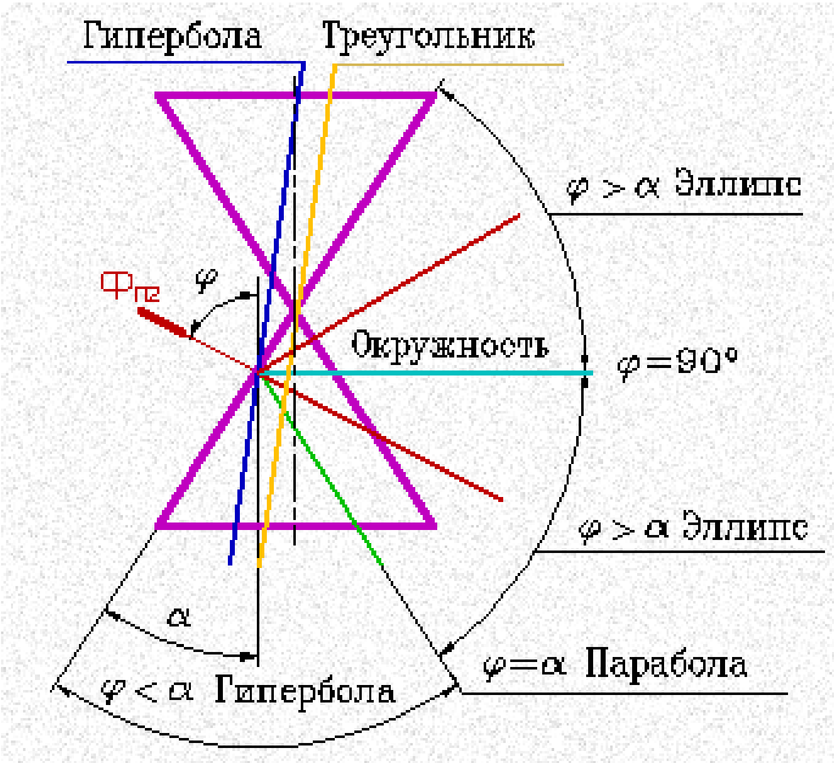


Рис. 7.4 - Перетин сфери площиною загального положення

2. Подальше рішення аналогічне попередній задачі.

7.3. Конічні перерізи

Залежно від положення січної площини лініями перерізу конічної поверхні можуть бути: еліпс, парабола, гіпербола, а в окремих випадках: коло, пряма, дві прямі і точка.



1. Якщо площина **Ф** перетинає всі твірні поверхні конуса обертання, тобто якщо **$\varphi > \alpha$**, то лінією перетину є **еліпс**. У цьому випадку січна площина не паралельна ні одній з твірних поверхні конуса.

2. В окремому випадку (**$\varphi = 90^0$**), тоді площина перетинає поверхню конуса по колу; і переріз вироджується в **точку**, якщо площина проходить через вершину конуса.

3. Якщо площина **Ф** паралельна до однієї твірної поверхні конуса, тобто **$\varphi = \alpha$**, то лінією перерізу буде **парабола**. В окремому випадку (якщо площина є дотичною до поверхні конуса) переріз вироджується в **пряму**.

4. Якщо площина **Ф** паралельна двом твірним поверхні конуса (в окремому випадку паралельна до осі конуса), тобто **$\varphi < \alpha$**, то лінією перерізу буде **гіпербола**.

5. У випадку проходження площини через вершину конічної поверхні, фігурою перерізу можуть бути самі твірні, тобто гіпербола вироджується в **дві прямі**, які перетинаються.

Лекція №8

8.1. Перетин лінії з поверхнею

8.2. Взаємний перетин поверхонь

8.2.1. Метод допоміжних січних площин

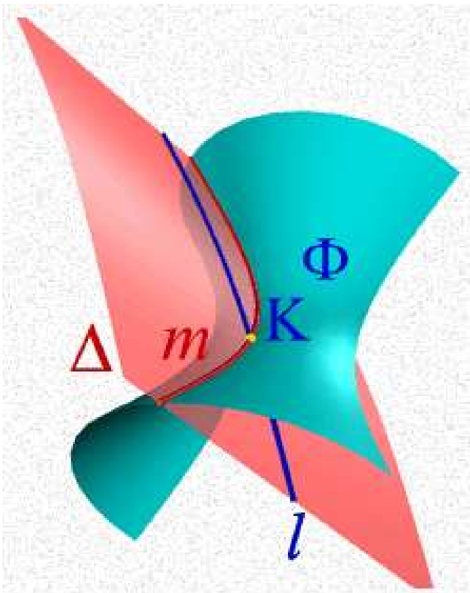
8.2.2. Метод допоміжних січних сфер

8.3. Окремі випадки перетину поверхонь другого порядку

8.1. Перетин лінії з поверхнею

У загальному випадку для графічного визначення точок перетину лінії з поверхнею (рис.8.1) необхідно виконати ряд геометричних побудов, описуваних наступним алгоритмом:

1. Заключаємо лінію **l** у деяку допоміжну поверхню **Δ**;
2. Будуємо лінію **m** перетину даної поверхні **Ф** і допоміжної поверхні **Δ**;
3. Визначаємо шукану точку **К** перетину ліній **l** і **m** (точка може бути не єдина).

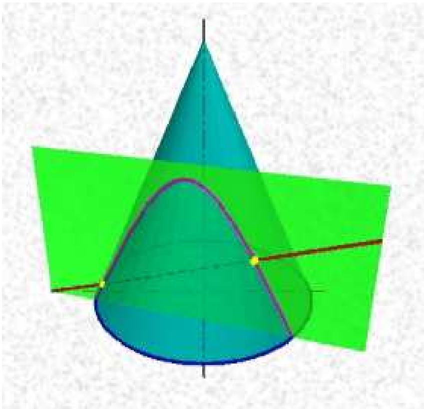


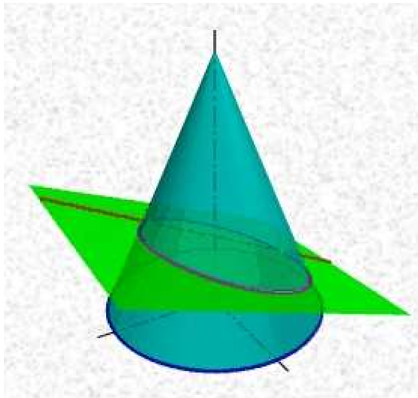
Як допоміжну поверхню доцільно використовувати циліндричну проектуючу поверхню, напрямною якої повинна служити задана лінія, а – прямолінійними твірними – проектуючі прямі.

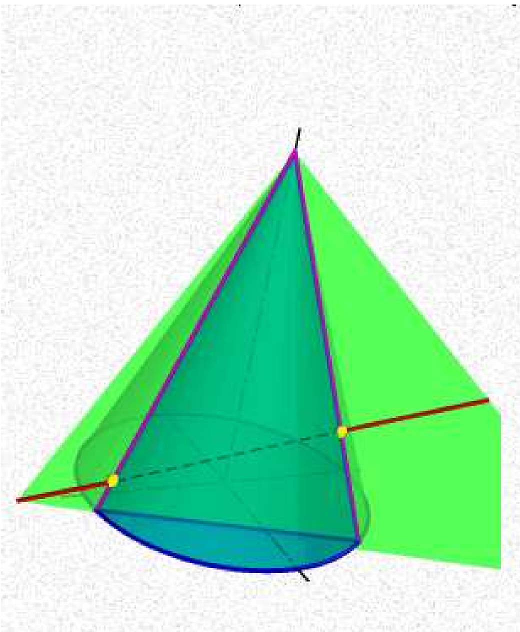
Приклад: Визначити точки перетину прямої лінії з поверхнею конуса обертання і визначити видимість прямої стосовно конуса.

Рис. 8.1.

Якщо в якості допоміжної січної площини вибрати горизонтально проектуючу або фронтально проектуючу площини, то в перетині вийдуть відповідно гіпербола (рис.8.2.а) або еліпс (рис.8.2б).







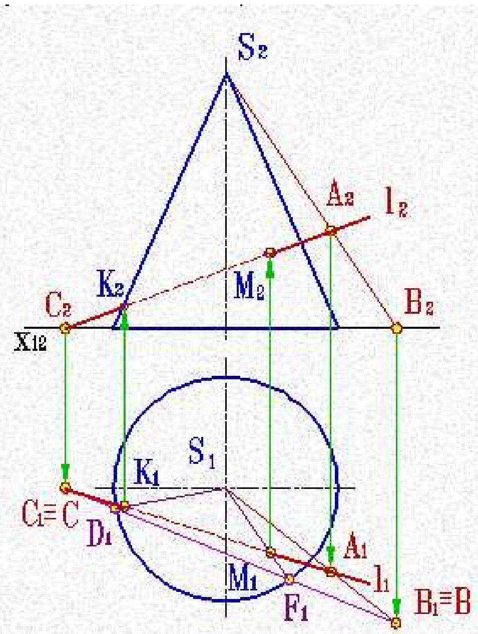


Рис. 8.2.а Рис. 8.2 б

Побудова таких кривих ліній значно ускладнює задачу.

Рис.8.3 - Перетин прямої лінії з конусом

(допоміжна січна площина-площина загального положення)

Тому в якості допоміжної січної площини доцільно вибрати таку площину, яка б включала пряму **l** і перетинала конус по твірним, (рис.8.3). Очевидно, що така площина визначається прямою **l** і точкою **S**- вершиною конуса. Нехай основа конуса лежить у горизонтальній площині проекцій, тоді лінія перетину допоміжної січної площини і горизонтальної площини проекцій **ВС** перетинає основу конуса в точках **D** і **F**. У такий спосіб у перетині конуса допоміжною січною площиною вийде трикутник **DFS**. Тому що отриманий трикутник і пряма **l** лежать в одній площині, точки їхнього перетину **К** і **М** будуть точками перетину прямої з конусом.

8.2. Взаємний перетин поверхонь

Лінією перетину двох поверхонь є множина точок, спільних для даних поверхонь. З цієї множини виділяють характерні (опорні, чи головні) точки, з яких варто починати побудову цієї лінії. Вони дозволяють побачити, у яких межах можна змінювати положення допоміжних січних поверхонь для визначення інших точок.

До таких точок відносяться: **екстремальні точки -** верхня і нижня точки щодо тієї чи іншої площини проекцій; **точки**, розташовані на нарисових твірних деяких поверхонь, **точки** межі зони видимості і т.д.

Слід мати на увазі, що лінія перетину двох поверхонь у проекціях завжди розташовується в межах контуру накладення проекцій двох поверхонь, що перетинаються.

Іноді доцільно скористатися перетворенням креслення, щоб показати поверхні, які перетинаються (чи одну з них) у особливому положенні.

Для визначення цих точок часто користуються допоміжними січними поверхнями. Поверхні-посередники перетинають дані поверхні по лініях, що, у свою чергу, перетинаються в точках лінії перетину даних поверхонь.

Січні поверхні-посередники вибираються так, щоб вони, перетинаючись із даними поверхнями, давали **прості для побудови лінії**, наприклад **прямі** й **кола**.

З загальної схеми побудови лінії перетину поверхонь виділяють два основних методи - **метод січних площин** і **метод січних сфер**.

У загальному випадку розв’язування задачі по побудові лінії перетину двох поверхонь може бути зведене до розглянутих раніше задач по визначенню:

1. Точок перетину лінії з поверхнею.
2. Лінії перетину площини і поверхні.
3. Комбінації першої і другої задачі.

8.2.1. Метод допоміжних січних площин

Допоміжні січні площини найчастіше вибирають проектуючими і (або) паралельними до однієї з площин проекцій - площинами рівня.

Цей спосіб рекомендується застосовувати, якщо перетини заданих поверхонь однією і тією ж площиною є прямими лініями або колами. Така можливість існує в трьох випадках:

1. Якщо твірні (кола) розташовані в загальних площинах рівня.
2. Якщо в загальних площинах рівня виявляються прямолінійні твірні лінійчатої поверхні і кола циклічної.
3. Лінійчаті каркаси заданих поверхонь належать загальним площинам рівня або пучкам площин загального положення.

Приклад 1: Розглянемо побудову лінії перетину трикутної призми з конусом, (рис.8.4) . Нехай вісь обертання конуса перпендикулярна до площини Π_1, а грані призми перпендикулярні до площини Π_2.

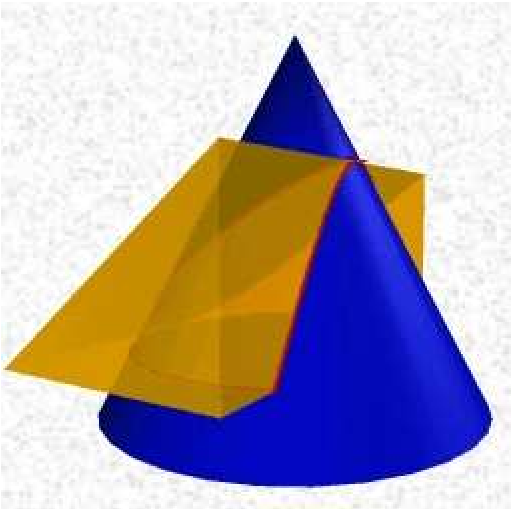


Рис.8.4а - Перетин конуса і призми

У цьому випадку призму можна розглядати, як три площини α, β, γ, що проходять через її грані, а задача зводиться до побудови ліній перетину цих площин з конусом.

При цьому відповідно до характерних перетинів конуса відомо, що площина α перетинає конус по колу, площина якого паралельна до Π_1, β- по гіперболі площина якої паралельна до Π_3, а γ- по еліпсі.

На площину Π_2 лінії перетину від усіх площин проектуються в прямі, що збігаються зі слідами площин α, β, і γ.

Для побудови проекцій цих ліній на площині Π_1 і Π_3 відзначимо характерні точки на вже наявній фронтальній проекції лінії перетину.

Точки 1_2 і 6_2 – перетину площини γ з нарисом проекції конуса на площину Π_2 (головним меридіаном), ці точки визначають положення великої осі еліпса, крім того точка 1_2 –проекція точки вершини гіперболи і одночасно належить конусу (лежить на нарисі фронтальної проекції конуса), і ребру призми (лінії перетину площин αі β), а точка 6_2- проекція точки, що одночасно належить конусу і ребру призми (лінії перетину площин α і γ); точки **2**, **3**, **7** і **8** – характерні тим, що їхні профільні проекції лежать на нарисі проекції конуса; 4_2, 5_2- точки, що лежать на середині відрізка 1_26_2 (великої осі еліпса) і визначають положення малої осі еліпса; **9**,**10** – точки одночасно належать конусу і ребру призми (утвореному перетином площин α і β).

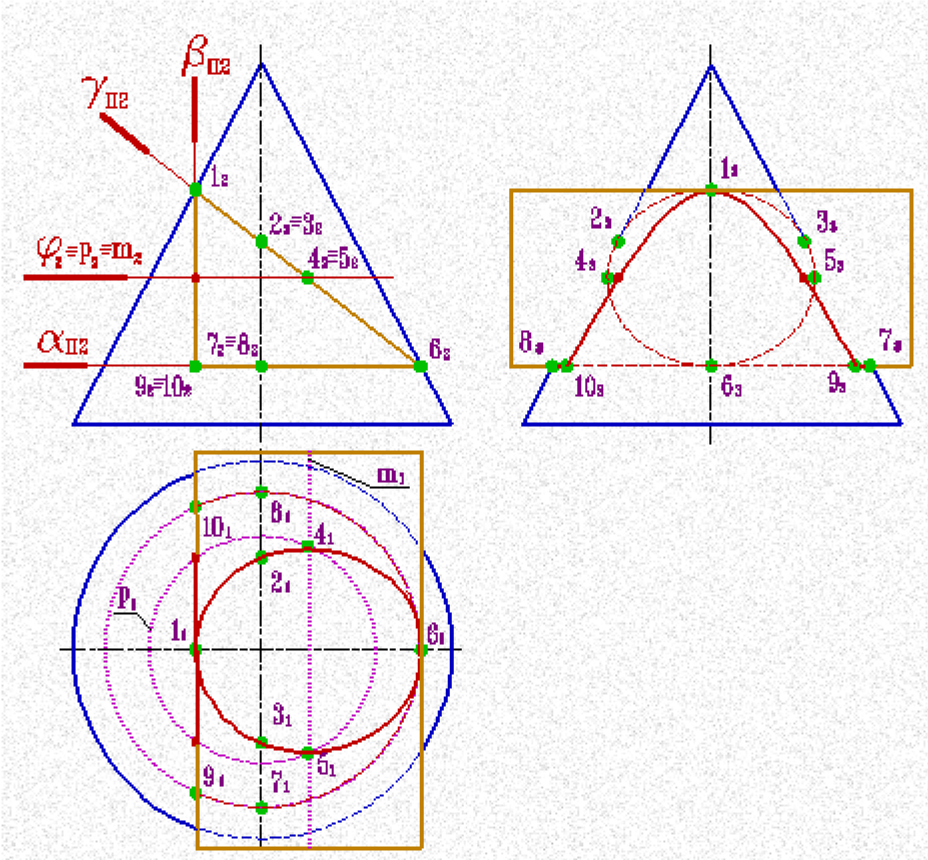


Рис.8.4б - Перетин конуса і призми

Розглянемо послідовність побудови проекцій точок **4** і **5**. Через фронтальні проекції цих точок проведемо допоміжну січну площину **φ**. Ця площина перетинає конус по паралелі **p**, а грань призми по прямої лінії **m**, паралельної до ребра. На горизонтальній площині проекцій перетином $\mathbf{p_1}$ і $\mathbf{m_1}$ визначають положення точок $\mathbf{4_1}$ і $\mathbf{5_1}$.

Для точної побудови кривих ліній перетину поверхонь позначених точок не досить.

Після побудови проекцій усіх точок їх необхідно з'єднати з урахуванням видимості.

Приклад 2: Перетин сфери і циліндра, (рис.8.5).У даному прикладі допоміжні площини рівня можуть бути паралельними площинам $\mathbf{\Pi_2}$ і $\mathbf{\Pi_1}$. У першому випадку фронтальні площини перетинають сферу по колах, а циліндр - по прямолінійним твірним.

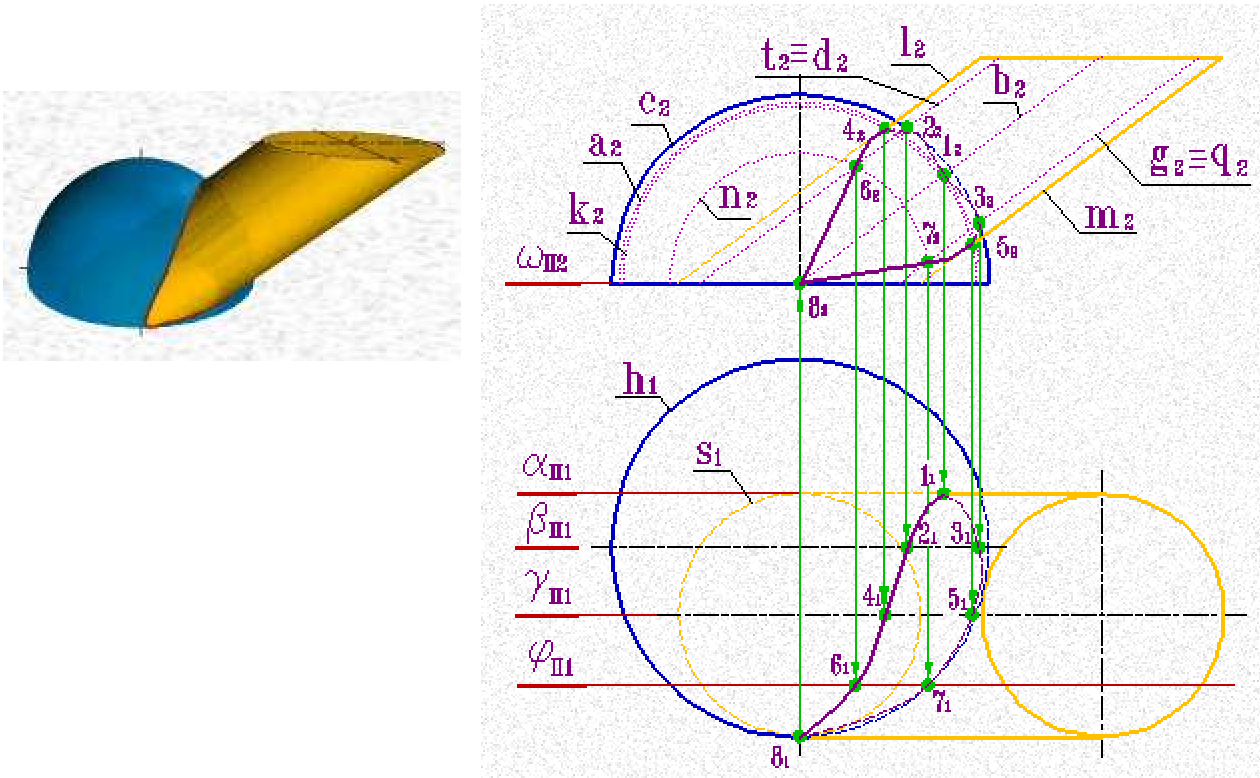


Рис.8.5 - Перетин напівсфери і еліптичного циліндра

Одна з таких площин α перетинається з поверхнями по дузі кола **a** і прямій лінії **b**. Точка **1,** перетину дуги кола **a** і прямої **b,** належать шуканій кривій.

За допомогою допоміжної січної площини **β** (площини головного фронтального меридіана півсфери) знайдені точки **2** і 3, як точки перетину головного фронтального меридіана півсфери - дуги кола **c** з лініями **d** і **g**.

Площина **γ** - площина головного фронтального меридіана циліндра, перетинає півсферу по дузі кола - **k**, яка у свою чергу перетинаючись з фронтальним меридіаном циліндра **l** і **m** визначає положення точок **4** і **5**. Аналогічно, за допомогою площини **φ** знайдені точки **6** і **7**.

Точка **8** знайдена за допомогою фронтально проектуючої площини **ω**, паралельної до горизонтальної площини проекцій, яка перетинає півсферу по колу - екватору **h**, а циліндр по колу основи **s**.

Характерними точками, у даному випадку, є точки**1- 5** і **8**, що лежать на нарисах проекцій поверхонь. Крім того, точки **1** і **8** визначають межу зони видимості кривої на площині **П**$_1$, а точки **4** і **5** – межу зони видимості на площині **П**$_2$.

8.2.2. Метод допоміжних січних сфер

При визначенні лінії перетину двох поверхонь обертання, при їх особливому взаємному розташуванні, не завжди раціонально застосовувати допоміжні січні площини. У деяких випадках застосовують **метод допоміжних січних сфер – концентричних або ексцентричних.**

Концентричні сферичні посередники застосовуються при визначенні лінії перетину двох поверхонь обертання з осями, які перетинаються між собою.

Кожна з цих поверхонь має сімейство кіл, які є лініями перетину їх концентричними сферами. Застосуванню методу концентричних сфер повинне передувати таке перетворення креслення в результаті якого осі обох поверхонь повинні бути розташовані паралельно до однієї і тієї ж площини проекцій, (рис.8.6) або одна з осей - стати проектуючою прямою, а друга - лінією рівня, (рис.8.7).

Осі поверхонь **G** і **Q** паралельні фронтальній площині проекцій і перетинаються в точці **А**, (рис.8.6). Ця **точка** приймається за **центр** усіх допоміжних концентричних сфер. Кожна з концентричних сфер перетинає поверхні по колах - паралелям (**a**, **b**, **c**, **d**, **n**), фронтальні проекції яких є прямими лініями ($\mathbf{a_2}$, $\mathbf{b_2}$, $\mathbf{c_2}$, $\mathbf{d_2}$, $\mathbf{n_2}$).

Проекції точок $\mathbf{1_2}$, $\mathbf{2_2}$, $\mathbf{3_2}$, $\mathbf{4_2}$, $\mathbf{5_2}$ і $\mathbf{6_2}$ перетину проекцій паралелей належать проекції шуканої лінії перетину поверхонь. Перетин головних меридіанів визначає крайні точки **7** і **8**.

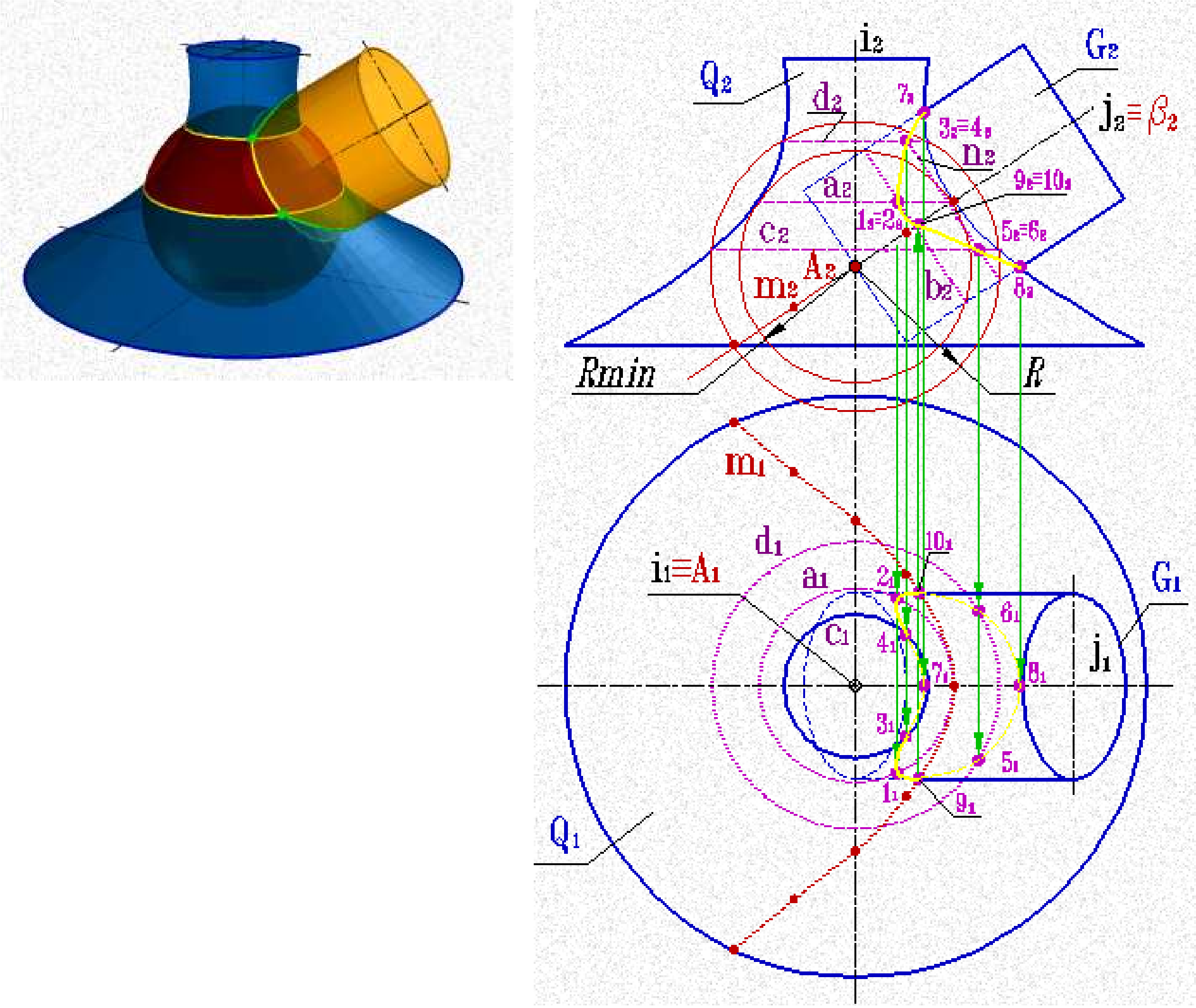


Рис.8.6 - Перетин поверхонь обертання, осі яких паралельні фронтальній площині проекцій.

Для точної побудови лінії перетину поверхонь необхідно знайти точки **9** і **10**, які визначають межу зони видимості лінії перетину поверхонь на горизонтальній проекції. Для цієї мети використовувалася допоміжна січна площина **β**, яка перетинає поверхню **Q** по лінії **m**, а поверхню **G** по твірним, горизонтальні проекції яких перетинаючись між собою, визначають положення шуканих крапок.

З'єднавши знайдені точки **1...10,** з урахуванням видимості, одержимо лінію перетину поверхонь.

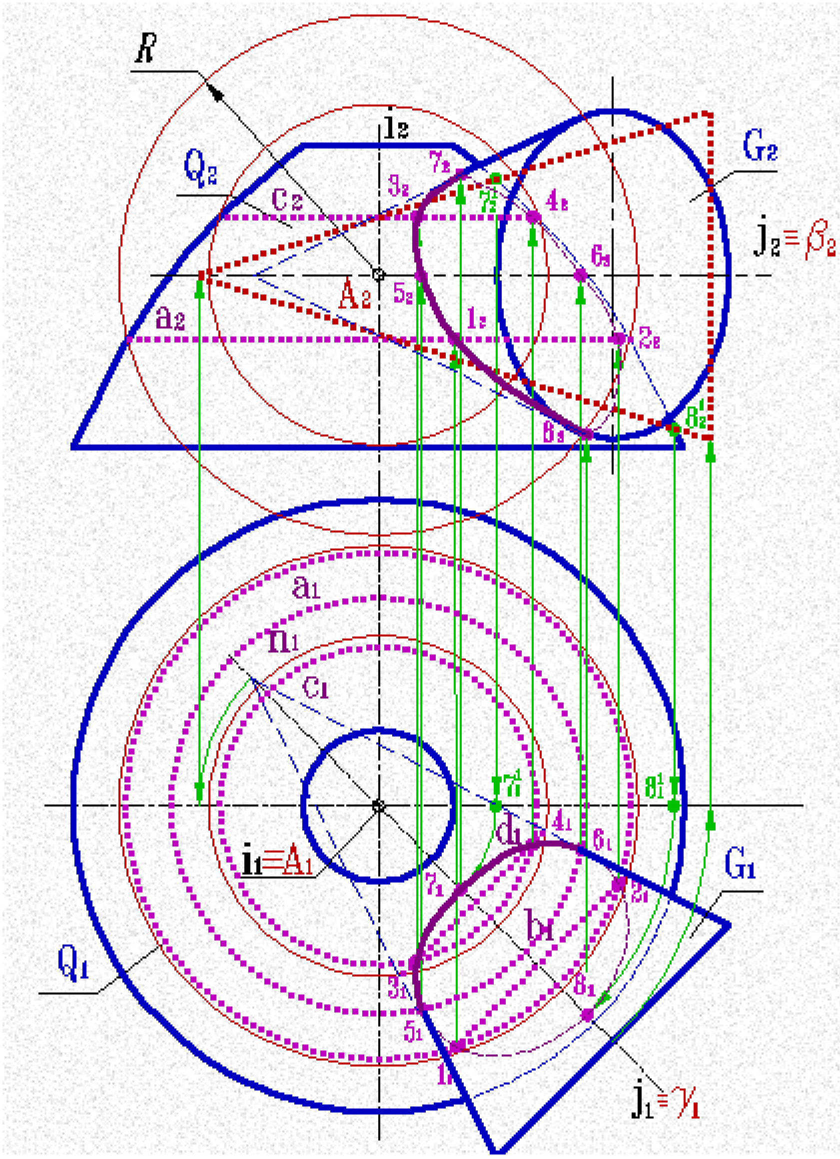


Рис.8.7. Перетин поверхонь обертання, вісь однієї - горизонтально проектуюча пряма, а другої - горизонталь

Другим прикладом використання, як допоміжних поверхонь посередників - концентричних сфер, розглянемо при визначенні лінії перетину поверхонь запропонованих на рис.8.7. Осі поверхонь обертання **G** і **Q** перетинаються в точці **A** , при цьому вісь поверхні **Q** - фронтально проектуюча пряма, а вісь поверхні **G** - горизонталь. Точка **A** приймається за центр усіх допоміжних концентричних сфер.

Точки **1** і **2** лінії перетину побудовані за допомогою сфери радіуса **R**. Ця сфера перетинає поверхню **Q** по колу **a**, а поверхню **G** по колу **b**, що показана тільки на горизонтальній проекції. Перетин горизонтальних проекцій кіл $\mathbf{a_1}$ і $\mathbf{b_1}$ визначають проекції $\mathbf{1_1}$ і $\mathbf{2_1}$ точок лінії перетину. Їхні фронтальні проекції $\mathbf{1_2}$ і

2_2 побудовані на **a_2** в перетині з лініями проекційного зв'язку. Аналогічно знайдені точки **3** і **4**.

Для побудови точок **5** і **6**, які визначають межу зони видимості на горизонтальній проекції, використовувалася допоміжна січна площина **β**, яка перетинає поверхню **Q** по колу **n**, а конічну поверхню **G** по трикутнику, який визначає її нарис на горизонтальній проекції.

Точки **7** і **8** знаходяться на межі зони видимості фронтальної проекції, для їхньої побудови використовується допоміжна січна площина **γ**.

З'єднавши знайдені точки **1...8**, з урахуванням видимості, одержимо лінію перетину поверхонь **G** і **Q**.

8.3. Окремі випадки перетину поверхонь другого порядку

Поверхнею другого порядку називається множина точок простору, декартові координати, яких задовольняють алгебраїчному рівнянню другого ступеня.

Дві поверхні другого порядку в загальному випадку перетинаються по просторовій лінії четвертого порядку, яку називають біквадратною кривою.

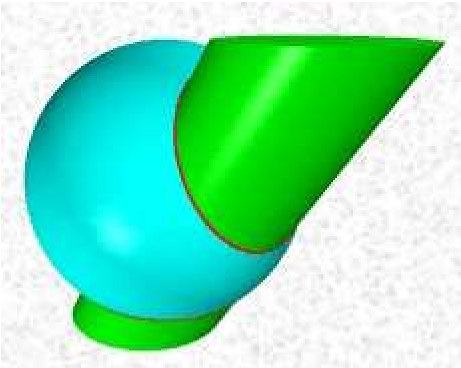
У деяких випадках біквадратна крива розпадається на дві плоскі криві другого порядку, причому одна з них може бути уявною.

Опускаючи докази, приведемо деякі теореми і приклади, що ілюструють їхнє застосування.

Теорема 1. Якщо дві поверхні другого порядку перетинаються по одній плоскій кривій, то існує ще інша плоска крива, по якій вони перетинаються.

Розглянемо приклад, до якого застосовна теорема.

Фронтальні проекції Θ_2 сфери **Θ** і Ω_2 еліптичного циліндра **Ω**, що мають спільне коло **m**(**m**$_2$) з центром **O**(**O**$_2$), (рис.8.8).



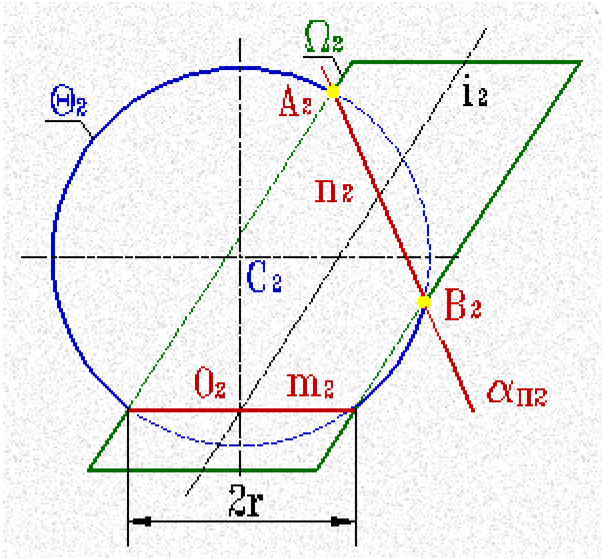


Рис.8.8 - Перетин сфери й еліптичного циліндра

Площина **σ**, обумовлена центром сфери **C** и віссю **i** циліндра, є площиною симетрії заданих поверхонь, і паралельна до фронтальної площини проекцій.

Спільне коло радіуса **r** – це одна з плоских кривих другого порядку лінії перетину, що розпалася.

Залишається побудувати другу криву, площина **α** якої повинна бути в умовах даного приклада перпендикулярна до площини симетрії **σ**, а отже і Π_2. Друга лінія перетину (коло) проектується на Π_2 у виді відрізка прямої n_2. Для її побудови варто скористатися точками A_2 і B_2, що належать нарисам заданих поверхонь.

Теорема 2. (теорема Г. Монжа). Якщо дві поверхні другого порядку описані навколо третьої або вписані в неї, то лінія їхнього перетину розпадається на дві плоскі криві другого порядку. Площини цих кривих проходять через пряму, що з'єднує точки ліній дотику.

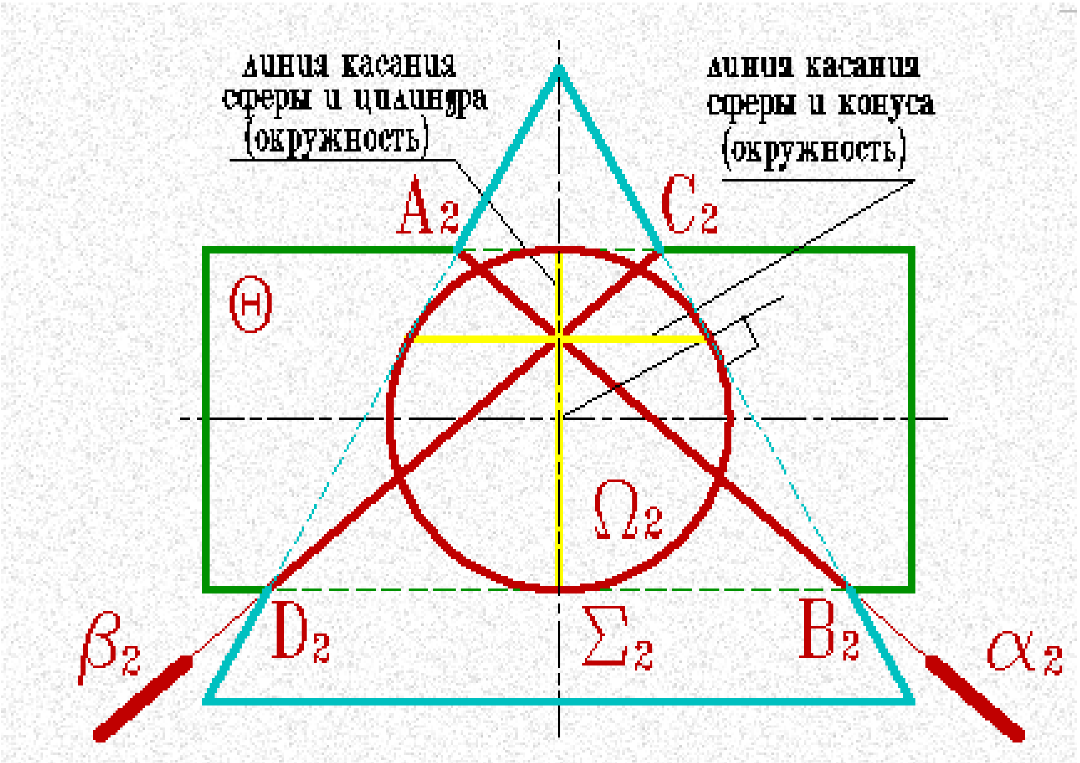


Рис.8.11 - Перетин конуса і циліндра, які мають спільну вписану сферу

Відповідно до цієї теореми лінія перетин конуса **Σ** і циліндра **Θ**, (рис.8.11), описаних навколо сфери **Ω**, будуть плоскими кривими – еліпсами (розташованими в площинах α і β), фронтальні проекції яких зображуються прямими $\mathbf{A_2B_2}$ і $\mathbf{C_2D_2}$.

Теорема Монжа знаходить ефективне застосування при конструюванні трубопроводів.

Запитання для самоперевірки:

1. Що є ознакою того, що точка належить повкрхні?
2. Як виглядає переріз конуса, якщо січна площина паралельна до однієї з твірних конуса?
3. Яка лінія утвориться в перерізі конуса, якщо січна площина перетинає вершину конуса ?

4. Яка лінія утворится в перерізі конуса, якщо січна площина перетинає усі твірні конуса ?
5. Які існують способи побудови лінії перетину поверхонь?
6. Які умови необхідно перевірити до застосування метода сфер-посередників?
7. Яку форму має лінія перетину двох поверхонь обертання, які мають спільну вісь?
8. Які існують особливі випадки перетину поверхонь другого порядку?
9. Як виглядає лінія перетину двох поверхонь другого порядку, якщо обидві описані навколо однієї сфери?
10. Якій порядок має лінія перетину двох поверхонь другого порядка?

Лекція №9

9.1. Аксонометричні проекції

9.2. Основна теорема аксонометрії (теорема Польке)

9.3. Стандартні аксонометричні проекції

9.4. Коло в аксонометрії

9.5. Побудова аксонометричних зображень

9.1. Аксонометричні проекції

Аксонометричні зображення широко застосовуються завдяки гарній наочності і простоті побудов.

Слово «аксонометрія» у перекладі з грецького означає **вимір по осях**. Аксонометричний метод може поєднуватися і з паралельним, і з центральним проектуванням за умови, що предмет проектується разом з координатною системою.

Сутність методу паралельного аксонометричного проектування полягає в тім, що предмет відносять до деякої системи координат і потім проектують паралельними променями на площину разом з координатною системою.

На рис. 9.1 показана точка **A**, віднесена до системи прямокутних координат **xyz**. Вектор ***S*** визначає напрямок проектування на площину проекцій $\mathbf{П^*}$.

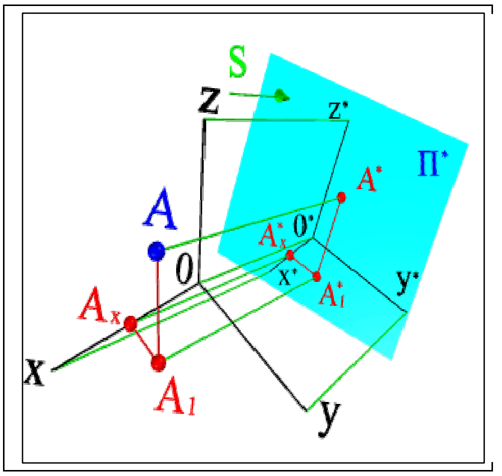


Рис.9.1 - Сутність методу аксонометричного проектування

Аксонометричну проекцію $\mathbf{A_1^*}$ **горизонтальної проекції точки A прийнято називати вторинною проекцією.**

Спотворення відрізків осей координат при їхньому проектуванні на $\mathbf{П'}$ характеризується так званим коефіцієнтом спотворення.

Коефіцієнтом спотворення називається відношення довжини проекції відрізка осі на картині до його натуральної довжини.

Так по осі $\mathbf{x^*}$ **коефіцієнт спотворення складає u=0*x*/0x, а по осі y* і z* відповідно υ=0*y*/0y і ω=0*z*/0z.**

У залежності від відношення коефіцієнтів спотворення аксонометричні проекції можуть бути:

Ізометричними, якщо коефіцієнти спотворення по всіх трьох осях рівні між собою; у цьому випадку **u = υ = ω;**

Диметричними, якщо коефіцієнти спотворення по двох будь-яких осях рівні між собою, а по третій – відрізняється від перших двох;

Триметричними, якщо всі три коефіцієнти спотворення по осях різні.

Аксонометричні проекції розрізняються також і по тім куті **φ**, що утворюється проектуючим променем із площиною проекцій. Якщо $\boldsymbol{\varphi \neq 90^o}$, то аксонометрична проекція називається **косокутною**, а якщо $\boldsymbol{\varphi = 90^o}$ – **прямокутною**.

9.2. Основна теорема аксонометрії (теорема Польке)

Розглянувши загальні відомості про аксонометричні проекції, можна зробити наступні висновки:

- аксонометричні креслення оборотні;
- аксонометрична і вторинна проекції точки цілком визначають її положення в просторі.

Аксонометричні проекції оборотні, якщо відома аксонометрія трьох головних напрямків вимірів фігури і коефіцієнти спотворення по цих напрямках.

Аксонометричні проекції фігури є її проекціями на площині довільного положення при довільно обраному напрямку проектування.

Очевидно можливо і зворотне. На площині можна вибрати довільне положення осей з довільними аксонометричними масштабами.

У просторі завжди можливо таке положення натуральної системи прямокутних координат і такий розмір натурального масштабу по осях, паралельною проекцією яких є дана аксонометрична система.

Німецький учений Карл Польке (1810-1876) сформулював основну теорему аксонометрії: три відрізки прямих довільної довжини, що лежать в одній площині і виходять з однієї точки під довільними кутами один до одного, представляють паралельну проекцію трьох рівних відрізків, відкладених на координатних осях від початку.

Відповідно до цієї теореми, **будь-які три прямі в площині**, що виходять з однієї точки і не співпадаючі між собою, **можна прийняти за аксонометричні осі**. Будь-які відрізки довільної довжини на цих прямих, відкладені від точки їхнього перетину, можна прийняти за аксонометричні масштаби. Ця система аксонометричних осей і масштабів є паралельною проекцією деякої прямокутної системи координатних осей і натуральних масштабів.

У практиці побудови аксонометричних зображень звичайно застосовують лише деякі визначені комбінації напрямків аксонометричних осей і аксонометричних масштабів: прямокутна ізометрія і диметрія, косокутна фронтальна диметрія, кабінетна проекція й ін.

9.3. Стандартні аксонометричні проекції

Відповідно **ГОСТ 2.317-69**, із прямокутних аксонометричних проекцій рекомендується застосовувати прямокутні **ізометрію** і **диметрію.**

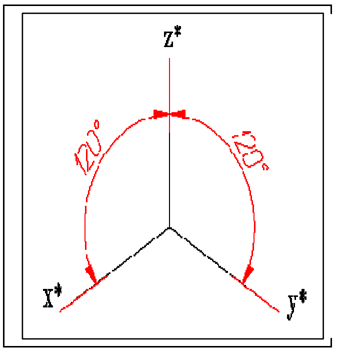
Між коефіцієнтами спотворення і кутом **φ**, утвореним напрямком проектування і картинною площиною, існує наступна залежність:

$$\mathbf{u^2+\upsilon^2+\omega^2=2+ctq^2\varphi,}$$

якщо $\boldsymbol{\varphi=90^o}$, то $\mathbf{u^2+\upsilon^2+\omega^2=2,}$

В ізометрії $u=\upsilon=\omega$ і, отже, $3u^2=2$, звідкіля $u=\sqrt{2/3} \approx 0{,}82$.

Таким чином, у прямокутній ізометрії розміри предмета по всіх трьох вимірах скорочуються на 18 %. ГОСТ рекомендує ізометричну проекцію будувати без скорочення по осях координат, (рис.9.2), що відповідає збільшенню зображення проти оригіналу в 1,22 рази.



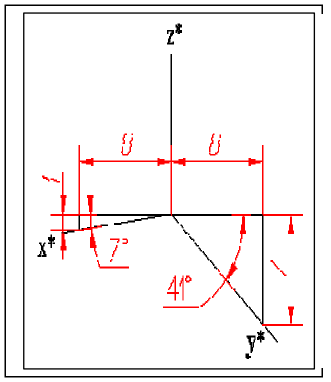


Рис.9.2 - Розташування вісей в ізометрії

Рис.9.3 - Розташування вісей в диметрії

При побудові прямокутної диметричної проекції скорочення довжин по осі “**у**” (рис9.3) приймають удвічі більше, ніж по двох іншим, тобто допускають, що $\mathbf{u=\omega}$, а $\mathbf{\upsilon=0{,}5u}$.

Тоді $\mathbf{2u^2+(0{,}5u)^2=2}$, звідкіля $\mathbf{u^2=8/9}$ і $\mathbf{u\approx 0{,}94}$, а $\mathbf{\upsilon=0{,}47}$.

У практичних побудовах від таких дробових коефіцієнтів звичайно відмовляються, уводячи масштаб збільшення, обумовлений співвідношенням **1/0,94=1,06**, і тоді коефіцієнти спотворення по осях **x’** і **z’** дорівнюють **одиниці**, а по осі **y’** удвічі менше $\mathbf{\upsilon=0{,}5}$.

З косокутних аксонометричних проекцій ГОСТ передбачає застосування фронтальної і горизонтальної ізометрії і фронтальної диметрії (останню ще називають кабінетною проекцією).

9.4. Коло в аксонометрії

При паралельному проектуванні кола на яку-небудь площину П* одержуємо його зображення в загальному випадку у виді еліпса, (рис.9.4).

Як би не була розташована площина кола, спочатку доцільно побудувати паралелограм **A*B*C*D*** – паралельну проекцію квадрата **ABCD**, описаного навколо даного кола, а потім за допомогою восьми точок і восьми дотичних вписати в нього еліпс.

Точки **1**, **3**, **5** і **7** – середини сторін паралелограма. Точки **2**, **4**, **6** і **8** розташовані на діагоналях так, що кожна з них поділяє напівдіагональ у співвідношенні **3**:7.**Дійсно, на підставі властивостей паралельного проектування можна записати, що A2/1O=A*2*/2*O*, але A1/1O=(r√2-r)/r≈3/7.** З восьми дотичних до еліпса перші чотири – це сторони паралелограма, а інші **t_2**, **t_4**, ***t_6***, **t_8**– прямі, паралельні його діагоналям.

Так дотична t_2^* до еліпса паралельна і діагоналі C*D*, пояснюється це тим, що t_2^* і C*D* є проекціями двох паралельних прямих t_2 і CD.

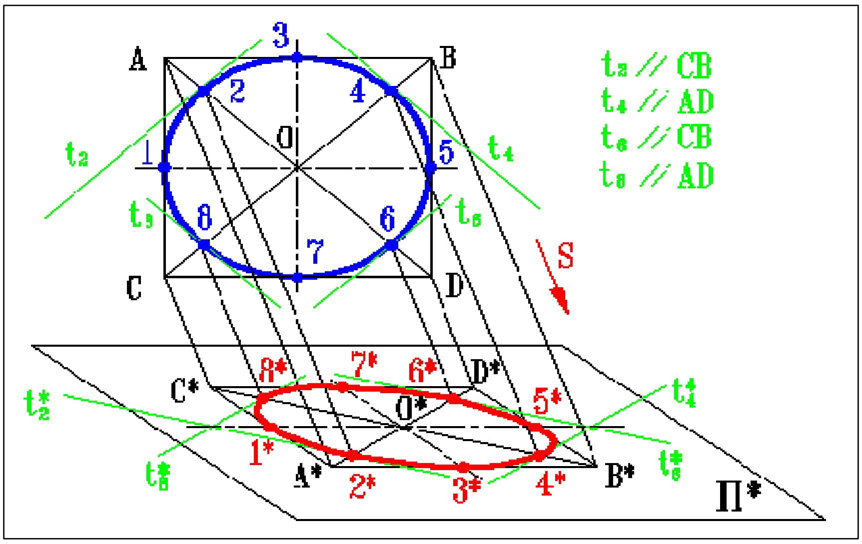


Рис.9.4 - Проектування кола на площину

Графічні побудови, що передують кресленню самого еліпса, доцільно виконувати в наступній послідовності (рис.9.5):

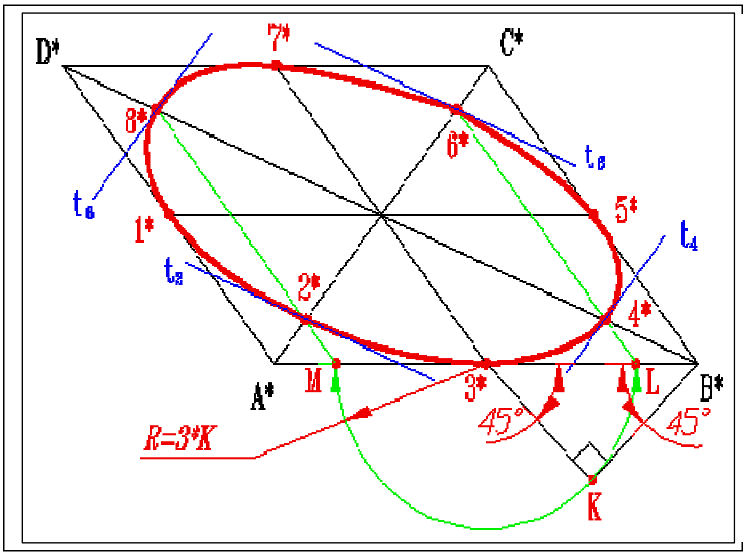


Рис.9.5 - Побудова еліпса

1. Побудувати аксонометричну проекцію квадрата - паралелограм **A*B*C*D*** і провести діагоналі **A*C*** і **B*D***;

2. Відзначити середини сторін паралелограма – точки **1***, **3***, **5*** і **7*** ;

3. На відрізку **3*B***, як на гіпотенузі, побудувати прямокутний рівнобедрений трикутник **3*KB***;

4. З точки **3*** радіусом **3*K** описати півколо, що перетне **A*B*** у точках **L** і **M**; ці точки поділяють відрізок **3*A*** і рівний йому відрізок **3*B*** у відношенні **3:7**;

5. Через точки **L** і **M** провести прямі паралельні бічним сторонам паралелограма, і відзначити точки **2*, 4*, 6*** і **8*** розташовані на діагоналях;

6. Побудувати дотичні до еліпса в знайдених точках. Дотичні $\mathbf{t_2}$ і $\mathbf{t_6}$ паралельні **BD,** а дотичні $\mathbf{t_4}$ і $\mathbf{t_8}$ паралельні **AC**.

7. Одержавши вісім точок і стільки ж дотичних, можна з достатньою точністю накреслити еліпс.

ГОСТ 2.317-69 визначає положення кіл, що лежать у площинах, паралельних площинам проекцій для прямокутної ізометричної проекції, (рис.9.6) і для прямокутної диметрії (рис.9.7).

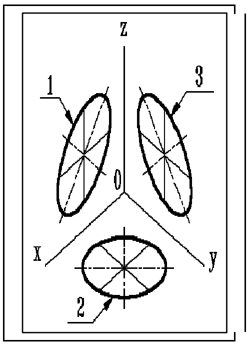


Рис.9.6

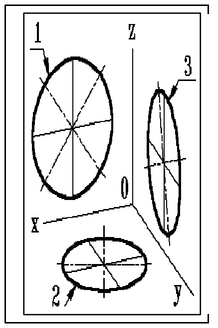


Рис.9.7

Якщо ізометричну проекцію виконують без спотворення по осях **x, y, z**, то велика вісь еліпсів **1,2, 3** дорівнює **1,22**, а мала вісь **-0,71** діаметра кола.

Якщо ізометричну проекцію виконують із спотворенням по осях **x, y, z**, то велика вісь еліпсів **1, 2, 3** дорівнює **діаметру** кола, а мала - **0,58** діаметра кола.

Якщо диметричну проекцію виконують без спотворення по осях **x** і **z**, то велика вісь еліпсів **1, 2, 3** дорівнює **1,06** діаметра кола, а мала вісь еліпса **1 - 0,95**, еліпсів **2** і **3 - 0,35** діаметра кола.

Якщо диметричну проекцію виконують із спотворенням по осях **x** і **z,** то велика вісь еліпсів **1, 2, 3** дорівнює діаметру кола, а мала вісь еліпса **1 - 0,9**, еліпсів **2** і **3 - 0,33** діаметра кола.

1-еліпс (велика вісь розташована під кутом 90^0 до осі **y**); **2**-еліпс (велика вісь розташована під кутом 90^0 до осі **z**); **3**-еліпс (велика вісь розташована під кутом 90^0 до осі **x**).

9.5. Побудова аксонометричних зображень

Перехід від ортогональних проекцій предмета до аксонометричного зображення рекомендується здійснювати в такій послідовності (рис.9.8):

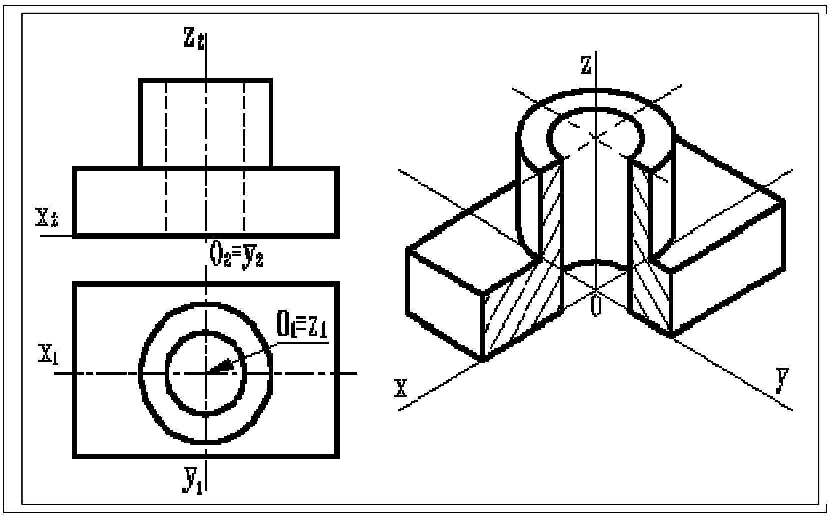


Рис.9.8 - Побудова аксонометричного зображення

1. На ортогональному кресленні розмічають осі прямокутної системи координат, до якого і відносять даний предмет. Осі орієнтують так, щоб вони допускали зручний вимір координат точок предмета. Наприклад, при побудові аксонометрії тіла обертання одну з координатних осей доцільно сумістити з віссю тіла.

2. Будують аксонометричні осі з таким розрахунком, щоб забезпечити найкращу наочність зображення і видимість тих чи інших точок предмета.

3. По одній з ортогональних проекцій предмета креслять вторинну проекцію.

4. Створюють аксонометричне зображення, для наочності роблять виріз чверті.

ГОСТ 2.317-69 визначає умовності і способи нанесення розмірів при побудові аксонометричного зображення, основну увагу варто звернути на наступні:

- Лінії штрихування перерізу в аксонометричних проекціях наносять паралельно однієї з діагоналей проекцій квадратів, що лежать у відповідних координатних площинах, сторони яких паралельні аксонометричним осям (рис.9.9).

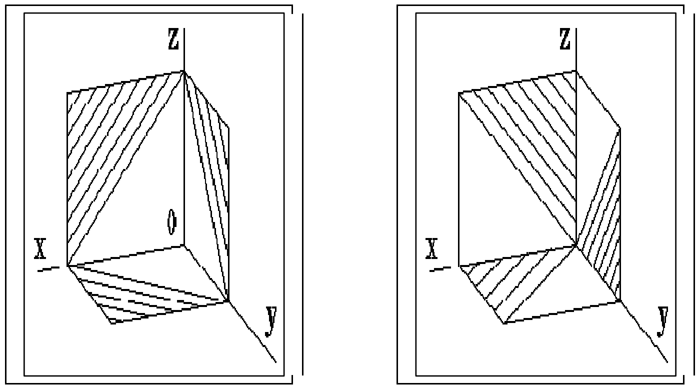


Рис.9.9 - Штриховка в аксонометрії

- При нанесенні розмірів виносні лінії проводять паралельно аксонометричним осям, розмірні лінії – паралельно вимірюваному відрізку.
- В аксонометричних проекціях спиці маховиків і шківів, ребра жорсткості і подібні елементи штрихують.

Запитання для самоперевірки:

1. Які види аксонометрії ви знаєте?
2. Як виходить аксонометричне креслення?
3. Що таке показник (коефіцієнт) спотворення?
4. Як розташовані осі в прямокутній диметрії?
5. Якій масштаб зображення у прямокутній ізометрії?
6. Чому дорівнюють натуральні і приведенні показники спотворення в прямокутній ізометрії?
7. Чому дорівнюють натуральні та приведенні показники спотворення в прямокутній диметрії?
8. Як розташовані осі в прямокутній ізометрії?
9. Чому дорівнює велика та мала осі еліпса в прямокутній ізометрії?
10. Чому дорівнює велика вісь еліпса в прямокутній диметрії?
11. Який масштаб зображення в прямокутній диметрії?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Інженерна та комп'ютерна графіка: Підручник / В.С. Михайленко та ін. За ред.. Михайленка – К: Вища шк.., 2007- 342 с.

2. Збірник задач з інженерної та комп'ютерної графіки: Навч. Посіб./ В.Є. Михайленко та інш.: за ред.. В.Є. Михайленка, К.: Вища шк..,2002-159 с.

3. Практикум з нарисної геометрії. Навчально-методичний посібник (для самостійної роботи студентів) Авт.: Лусь В.І..Киркач Т.Є., Мандріченко О.Є.,Радченко А.О.,; за ред.. Луся В.І.- Харків : ХНАМГ, 2005-184 с.

4. Завдання з нарисної геометрії (для самостійної роботи студентів)/Укл.: Лусь В.І..Киркач Т.Є., Мандріченко О.Є.,Радченко А.О..- Харків : ХНАМГ, 2006-60 с.

5. Единая система конструкторской документации. Общие правила выполнения чертежей : М., 1988.

6. Справочник по инженерной графике. А.В.Потишко, М., 1983.

7. Начертательная геометрия. Инженерная графика (рабочая программа, методические указания и контрольніе задания) - Харьков, УЗПИ, 1989.

ЗМІСТ

Вступ 3

Лекція №1 4
1.1. Предмет нарисної геометрії..4
1.2. Види проектування...6
1.3. Метод Монжа 8
1.4. Точка 10
1.4.1. Точка в ортогональній системі двох площин проекцій..............10
1.4.2.Точка в ортогональній системі трьох площин проекцій 11
1.4.3.Конкуруючі точки..13

Лекція №2 15
2.1. Пряма лінія 15
2.2. Положення прямої відносно площин проекцій 16
2.3. Сліди прямої..20
2.4. Взаємне розташування точки і прямої...21
2.5. Поділ відрізка прямої лінії в даному співвідношенні....................23
2.6. Визначення довжини відрізка прямої лінії і кутів нахилу
прямої до площин проекцій 24
2.7. Взаємне положення двох прямих..25

Лекція №3 30
3.1. Площина...30
3.2. Способи графічного задання площин...30
3.3. Положення площини щодо площин проекцій 32
3.4. Сліди площини..36
3.5. Головні лінії в площині 36
3.6. Взаємне розташування прямої і площин.......................................38
3.7. Взаємне розташування точки і площини 42
3.8 Взаємне розташування площин..43

Лекція №4 36

4.1. Позиційні та метричні задачі...48
4.2. Методи перетворення ортогональних проекцій............................50
4.3. Метод заміни площин проекцій 51
4.4. Метод плоскопаралельного переміщення......................................53
4.5. Метод обертання навколо осі перпендикулярної до площини......54
4. Метод обертання навколо осі паралельної до площини
проекцій (обертання навколо лінії рівня)... 56

Лекція №5 58
5.1.Многогранники. Види многогранників..58
5.2. Перетин площини з многогранником..59
5.3. Перетин прямої лінії з многогранником 60

5.4. Взаємний перетин многогранників 61

Лекція №6 64

6.1. Криві лінії. Основні поняття і визначення 64

6.2. Властивості ортогональних проекцій кривої лінії 69

6.3. Просторові криві лінії 70

6.4. Формування поверхні...71

6.5. Поверхні обертання 74

6.6. Гвинтові поверхні 76

6.7. Лінійчаті поверхні з площиною паралелізму (поверхні Катала)...77

6.8. Поверхні паралельного переносу...78

Лекція №7 80

7.1. Лінія і точка, що належать поверхні...80

7.2. Перетин поверхні площиною 82

7.3. Конічні перерізи...84

Лекція №8 86

8.1. Перетин лінії з поверхнею 86

8.2. Взаємний перетин поверхонь 88

8.2.1. Метод допоміжних січних площин...89

8.2.2. Метод допоміжних січних сфер 93

8.3. Окремі випадки перетину поверхонь другого поряд......................96

Лекція №9 99

9.1. Аксонометричні проекції..99

9.2. Основна теорема аксонометрії (теорема Польке) 101

9.3. Стандартні аксонометричні проекції...102

9.4. Коло в аксонометрії...103

9.5. Побудова аксонометричних зображень...106

Список літератури 109

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Конспект лекцій з курсу інженерної графіки (для студентів 1 курсу, денної форми навчання за напрямком підготовки – 6.050701, 6.050702)

Укладач: Олена Евгенівна Мандріченко

Редактор: М.З. Аляб'єв

План 2008, поз. 31Л

Підп. до друку 22.10.2008	Формат 210×297 1/8	Папір офісний
Друк на ризографі	Умон.-друк. арк. 5,3	Обл.-вид.арк. 5,6.
Тираж 150 прим.	Замовл. №	

61002, Харків, ХНАМГ, ул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ЦНІТ ХНАМГ

61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12